2 Relativistische Quantenmechanik

2.1 Einsteinsches Relativitätsprinzip (Spezielle Relativitätstheorie)

I. Postulat der Relativität

Die Gleichungen, durch die die Naturgesetze ausgedrückt werden, sind invariant gegenüber einer Transformation der Koordinaten und der Zeit von einem Inertialsystem* in ein anderes.

*Inertialsystem: ein Bezugssystem, das keinen äußeren Kräften unterliegt. ($\vec{v}$-konstant)

II. Postulat der Lichtgeschwindigkeit

Die Lichtgeschwindigkeit ist von der Bewegung der Lichtquelle unabhängig.

2.1.1 Ereignisse und der Minkowski-Raum

Ereignis: wird durch seine Raum-Zeit-Koordinaten beschrieben: (x, y, z, t)

Ereignis 1: Lichtstrahl wird ausgesandt (punktförmige Quelle)
in K : (x_1, y_1, z_1, t_1)
in K' : $(x_1', y_1', z_1', t_1',)$

Ereignis 2: die Lichtwelle erreicht in K den Punkt (x_2, y_2, z_2) zur Zeit t_2,
in K' den Punkt (x_2', y_2', z_2') zur Zeit t_2'.

Für K gilt

$$c^2(t_2 - t_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \ , \tag{2.1}$$

und für K'

$$c^2(t_2' - t_1')^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 \ . \tag{2.2}$$

Def: Abstand zwischen zwei Ereignissen:

$$s_{12} = \left[c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2\right] \tag{2.3}$$

Der Abstand zwischen zwei Ereignissen ist invariant bezüglich Transformationen von einem Inertialsystem zu einem beliebigen anderen.

Geometrische Sicht

Notation: $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$

Ein Raum mit Abstand

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \tag{2.4}$$

wird Minkowski-Raum genannt.

Vergleich mit dem Euklidischen Raum:

$$\text{(4-D)} \longrightarrow s^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 \tag{2.5}$$

Transformationen welche s^2 im Euklidischen Raum invariant lassen $\longrightarrow$ orthogonale Transformationen (O(4)). Die Transformationen, welche s^2 im Minkowski-Raum invariant lassen, sind die Lorentz-Transformationen ($\longrightarrow$ Transformationen von einem Inertialsystem zu einem anderen IS).

2.1.2 Lorentz-Transformationen

Sei $\vec{v} = (v, 0, 0) \Rightarrow y$ und z sind dieselben für ein Ereignis von K oder K' aus gesehen.

Transformation $\longrightarrow$ "Drehung" in der (x, t) Ebene.

Im Euklidischen–Raum gilt

$$\begin{aligned} x^1 &= \cos\theta\, x^{1'} + \sin\theta\, x^{2'} \\ x^2 &= -\sin\theta\, x^{1'} + \cos\theta\, x^{2'} . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Bei einer solchen Transformation bleibt der Abstand invariant:

$$\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 = \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\left(x^{1'}\right)^2 + \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\left(x^{2'}\right)^2 \tag{2.7}$$

Vorschlag für den Minkowksi–Raum

$$\begin{aligned} x &= x'\cosh\psi + ct'\sinh\psi \\ ct &= x'\sinh\psi + ct'\cosh\psi \end{aligned} \tag{2.8}$$

ψ: "Drehwinkel". Damit hat man

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 , \tag{2.9}$$

wobei wir benutzt haben, dass $\cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1$.

Bestimmung von ψ

Koordinaten–Ursprung von K', gesehen aus K:

$$\left.\begin{aligned} x &= ct'\sinh\psi \\ ct &= ct'\cosh\psi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{x}{ct} = \frac{v}{c} = \tanh\psi \tag{2.10}$$

Zur Erinnerung

$$\begin{aligned}
\sinh\psi &= \frac{\tanh\psi}{\sqrt{1-\tanh^2\psi}} \\
\cosh\psi &= \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\psi}} \,.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}
x &= \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\
y &= y' \\
z &= z' \\
t &= \frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

2.1.3 Tensoren in einem n-dimensionalen Raum

Wir betrachten allgemeine Koordinatentransformationen in einem n-dimensionalen Raum.

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, ..., x^n)\,, \qquad i' = 1, ..., n \tag{2.13}$$

Beispiele:

i) Orthogonale Transformationen im Euklidischen Raum.

ii) Koordinatenwechsel von Cartesischen zu Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten.

iii) Lorentz-Transformationen im Minkowski-Raum.

Für ein Längenelement hat die Transformation die folgende Form

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \tag{2.14}$$

Verallgemeinerung $\longrightarrow$

Def.: Kontravarianter Vektor: n-komponentiges Objekt, das unter einer Koordinatentransformation wie folgt transformiert wird:

$$u'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} u^j \tag{2.15}$$

Konvention: Kontravariante Vektoren haben Indizes oben.

Sei $f(x^1, ..., x^n)$ eine differenzierbare Funktion. Der Gradient dieser Funktion wird wie folgt transformiert:

$$\frac{\partial f}{\partial x'^i} = \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} \tag{2.16}$$

Verallgemeinerung $\longrightarrow$

Def.: Kovarianter Vektor: n–komponentiges Objekt, wobei

$$v'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} v_j \ . \tag{2.17}$$

Konvention: kovariante Vektoren haben Indizes unten.

Def.: Ein Tensor $(p+q)$-ter Stufe wird durch $n^{(p+q)}$ Komponenten gegeben (p-kontravariant und q kovariant), wobei

$$T'^{i_1 \cdots i_p}_{\;\; j_1 \cdots j_q} = \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial x'^{i_p}}{\partial x^{k_p}} \frac{\partial x^{\ell_1}}{\partial x'^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{\ell_q}}{\partial x'^{j_q}} T^{k_1 \cdots k_p}_{\ell_1 \cdots \ell_q} \tag{2.18}$$

Kontraktion von Indizes: kann nur stattfinden, wenn einer der Indizes kontravariant und der andere kovariant ist.

Beispiel: $T^{ij}_{\;\;k} \longrightarrow V^i = T^{ij}_{\;\;j}$

$$V'^i = T'^{ij}_{\;\;j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \underbrace{\frac{\partial x'^j}{\partial x^\ell} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j}}_{=\delta^m_\ell} T^{kl}_{\;\;m} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} V^k \tag{2.19}$$

Falls Indizes derselben Art kontrahiert werden, transformiert sich das resultierende Objekt nicht wie ein Tensor.

Skalarprodukt zweier Vektoren

$$A'^i B'_i = \underbrace{\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}}_{=\delta^k_j} A^j B_k = A^k B_k \tag{2.20}$$

$\hookrightarrow$ invariant gegenüber Koordinatentransformationen: Tensor nullter-Stufe.

Def.: Metrischer Raum M: falls ein Abstand $d(x,y)$ zwischen Punkten x und y definiert werden kann, mit folgenden Eigenschaften:

$$x, y \in M \longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} d(x,y) & = & d(y,x) \\ d(x,y) & = & 0 \Longleftrightarrow x = y \end{array} \right. \tag{2.21}$$

<u>Def.:</u> Riemannscher Raum: metrischer Raum, wobei das Wegelement die folgende Form hat:

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{2.22}$$

mit $\mid g_{ij} \mid \neq 0$. g_{ij}: metrischer Tensor (symmetrisch).

<u>Beispiele</u>:

i) Euklidischer Raum (n-Dimensionen)

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^1 dx^1 + \cdots + dx^n dx^n \\ \hookrightarrow g_{ij} &= \delta_{ij} \end{aligned} \tag{2.23}$$

ii) Minkowski-Raum

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 \\ \hookrightarrow g_{00} &= 1; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1; \quad g_{ij} = 0, \quad i \neq j \end{aligned} \tag{2.24}$$

g_{ij} ist ein Tensor $\longrightarrow$ Beweis: ds^2 ist eine Invariante gegenüber Lorentztransformationen:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^\ell} dx'^k dx'^\ell = g'_{k\ell}\, dx'^k dx'^\ell \\ \hookrightarrow g'_{ij} &= \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} g_{mn} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Transformiert sich wie ein kovarianter Tensor.
<u>Kontravariante Form des metrischen Tensors</u>

Falls wir den metrischen Tensor als eine Matrix ansehen

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

dann sehen wir gleich, daß der metrische Tensor eine Inverse hat.

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

Da g ein kovarianter Tensor ist, soll $\tilde{g}$ eine kontravariante Größe sein, um $\tilde{g}$ mit g zu kontrahieren, d.h.

$$g_{ik}\, \tilde{g}^{kj} = \delta_i^j\ . \tag{2.28}$$

Wir können zeigen, daß $\tilde{g}^{kj}$ auch ein Tensor ist. Unter einer Koordinatentransformation haben wir

$$
\begin{aligned}
{g'}_{ik}\tilde{g}'^{kj} &= \delta_i^j = \tilde{g}'^{kj}\frac{\partial x^\ell}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}g_{\ell m} \\
\hookrightarrow \tilde{g}'^{kj}\frac{\partial x^\ell}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}g_{\ell m}\frac{\partial x'^i}{\partial x^n} &= \frac{\partial x'^j}{\partial x^n} \\
\hookrightarrow \tilde{g}'^{kj}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}\underbrace{g_{nm}\tilde{g}^{pn}}_{=\delta_m^p} &= \frac{\partial x'^j}{\partial x^n}\tilde{g}^{pn} \\
\hookrightarrow \tilde{g}'^{kj}\underbrace{\frac{\partial x^p}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^\ell}{\partial x^p}}_{=\delta_k^\ell} &= \frac{\partial x'^\ell}{\partial x^p}\frac{\partial x'^j}{\partial x^n}\tilde{g}^{pn} \\
\hookrightarrow \tilde{g}'^{j\ell} &= \frac{\partial x'^j}{\partial x^n}\frac{\partial x'^\ell}{\partial x^p}\tilde{g}^{np}
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

$\tilde{g}^{ij}$ ist ein kontravarianter Tensor. Dieser kontravarianter Tensor ist auch ein metrischer Tensor:

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= g_{ij}dx^i dx^j = g_{ij}\underbrace{\delta_k^j}_{=\tilde{g}^{jl}g_{lk}}dx^i dx^k \\
&= \tilde{g}^{jl}\underbrace{g_{ji}dx^i}_{=dx_j}\underbrace{g_{lk}dx^k}_{=dx_\ell} = \tilde{g}^{jl}dx_j dx_k
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Mit dem metrischen Tensor können die Indizes hoch- oder heruntergesetzt werden. Ab jetzt schreiben wir

$$\tilde{g} \longrightarrow g^{ij} \tag{2.31}$$

2.1.4 Vierervektoren, Vierertensoren

Nun kehren wir zum Minkowski-Raum zurück.

<u>Kontravarianter Vektor</u>:

$$x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = \left(ct, x^1, x^2, x^3\right) \tag{2.32}$$

Differentielles Linienelement (Abstand zwischen zwei Ereignissen)

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{2.33}$$

Für die Raum-Zeit verwenden wir griechische Indizes.

<u>Kovarianter Vektor</u>

$$dx_\mu = g_{\mu\nu}dx^\nu \longrightarrow x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu \tag{2.34}$$

$g_{\mu\nu}$ hat die folgende Form

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \hookrightarrow x_\mu &= \left(x^0, -x^1, -x^2, -x^3\right) \end{aligned} \tag{2.35}$$

Der kontravariante metrische Tensor ist durch

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

gegeben $\longrightarrow$ $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ Ein kontravarianter Vektor kann aus einem kovarianten Vektor konstruiert werden:

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \tag{2.37}$$

Es gilt weiterhin $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta^\mu_\nu$

Im allgemeinen:

Kontravarianter Vierervektor

$$A^\mu = \left(A^0, A^1, A^2, A^3\right) \tag{2.38}$$

Kovarianter Vierervektor

$$A_\mu = \left(A^0, -A^1, -A^2, -A^3\right) \tag{2.39}$$

Nach einer Koordinaten-(Lorentz) Transformation $x^\mu \longrightarrow x'^\mu$

$$\begin{aligned} A'^\mu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \qquad \text{kontravariant} \\ B'_\mu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu \qquad \text{kovariant} \\ A^\mu B_\mu &\rightarrow \text{Skalar (Invariante).} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Weiterhin:

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \tag{2.41}$$

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \tag{2.42}$$

Genauso kann man Vierertensoren haben:

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda} A_\lambda^\nu = g^{\mu\lambda} A_{\lambda\rho} g^{\rho\nu} \tag{2.43}$$

auch δ^μ_ν, $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ usw.

Ableitungen:

Vierergradient $\partial/\partial x^\mu$ (kovariant). Schreibweise:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}}_{=\vec{\nabla}} \right) \\
\partial^\mu &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla} \right)
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Viererdivergenz (Skalar)

$$\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu = \underbrace{\frac{\partial A^0}{\partial x^0}}_{=\frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t}} + \underbrace{\frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3}}_{=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}} \tag{2.45}$$

$\hookrightarrow$ Kontinuitätsgleichung.

Verallgemeinerung des Laplace–Operators $\longrightarrow$ d'Alembert–Operator.

$$\Box := \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial {x^0}^2} - \triangle = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle \tag{2.46}$$

Dies ist der Operator der Wellengleichung.

Anwendungsbeispiele

i) Skalar (Invariante)

- *a)* ds^2 bzw. ds
- *b)* Eigenzeit $d\tau = \frac{ds}{c}$

ii) Vierergeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
u^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\tau} \\
\hookrightarrow u^0 &= \frac{d(ct)}{d\tau} = \frac{d(ct)}{\sqrt{1-\beta^2}dt} = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \left(\beta = \frac{v}{c}\right) \\
u^1 &= \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = v_x \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u^2, \quad u^3 \\
\hookrightarrow u_\mu u^\mu &= \frac{1}{\left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^2}\left[c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2\right] = c^2
\end{aligned} \tag{2.47}$$

2.1.5 Lorentz-Transformationen im Viererraum

Lineare Transformationen, die $s^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ invariant lassen.

$$\begin{aligned} x'^\mu &= L^\mu_\nu x^\nu \\ \hookrightarrow g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu &= g_{\mu\nu}L^\mu_\rho L^\nu_\sigma x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma \\ \hookrightarrow g_{\rho\sigma} &= g_{\mu\nu}L^\mu_\rho L^\nu_\sigma = \left(L^T\right)^\mu_\rho g_{\mu\nu}L^\nu_\sigma \end{aligned} \tag{2.48}$$

In Matrixnotation:

$$\begin{aligned} g &= L^T g L \Longleftrightarrow L^T g = g L^{-1} \\ \longrightarrow \det g &= \underbrace{\det\left(L^T\right)}_{\det L} \det(g)\det(L) \\ \Longrightarrow \det L &= \pm 1 \end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\det L \begin{cases} 1 & : \text{ eigentliche Lorentz-Transformation} \\ -1 & : \text{ uneigentliche Lorentz-Transformation} \end{cases} \tag{2.50}$$

(Vergleiche mit O(3)).

Beispiele

i) Rotationen: $L^0_0 = 1, L^0_\mu = 0$

$$L = \begin{pmatrix} 1 : & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ : & \\ 0 : & R \\ : & \end{pmatrix} . \tag{2.51}$$

In diesem Fall haben wir

$$\det L \begin{cases} 1 & \rightarrow \text{ eigentliche Rotationen} \\ -1 & \rightarrow \text{ uneigentliche Rotationen} \end{cases} \tag{2.52}$$

ii) Boosts: Transformation zu einem sich mit Geschwindigkeit v in x-Richtung (bzw. y, z) bewegenden Inertialsystem.

$$x'^0 = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad x'^1 = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad x'^2 = x^2; \quad x'^3 = x^3 \tag{2.53}$$

Die entsprechende Transformationsmatrix sieht wie folgt aus

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

Im allgemeinen haben wir 3 Parameter für Rotationen (3 Euler–Winkel) und 3 Parameter für Boosts. (3 Komponenten von $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$) $\longrightarrow$ 6-Parameter-Transformation.

Alternativ: $g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} L^{\rho}_{\mu} L^{\sigma}_{\nu} \to$ 16 Gleichungen aber $g_{\mu\nu}$ ist symmetrisch $\Longrightarrow$ nur 10 unabhängige Gleichungen $\Longrightarrow$ 6 unabhängige Parameter.

Die (homogenen) Lorentz-Transformationen bilden eine Gruppe. Die Lorentz-Gruppe kann durch Translationen in der Raum-Zeit auf die Poincaré-Gruppe erweitert werden

$$x^{\mu} \longrightarrow x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \tag{2.55}$$

wobei a^{μ}: Konstante. (10-Parameter Gruppe).

Die homogenen Lorentz–Transformationen können als Spezialfall der Gruppe O(p,q) betrachtet werden

---

O(p,q)= $\{A \mid A \in M((p+q) \times (p+q), \Re)$, so daß $A^T g = g A^{-1}$; $g \in \mathrm{diag}(p+q, p+q)$; $g_i = 1,\ i = 1, \ldots, q$; $g_i = -1,\ i = q+1, \ldots, q+p\}$.

$\Rightarrow$ Lorentz–Gruppe: O(3,1).

SO(p,q) wie O(p, q) aber det $A = 1$. $\Rightarrow$ Eigentliche Lorentz-Transformationen $\in$ SO(3,1).

Die mathematische Struktur der homogenen Lorentz-Transformationen kann weiter untersucht werden, indem wir infinitesimale LT betrachten:

$$L^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \eta^{\mu}_{\nu} \tag{2.56}$$

Nun soll gelten

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} L^{\mu}_{\rho} L^{\nu}_{\sigma} \tag{2.57}$$

Bis $\mathcal{O}(\eta)$ hat man

$$\begin{aligned} g_{\rho\sigma} &= g_{\mu\nu} \left(\delta^{\mu}_{\rho} + \eta^{\mu}_{\rho}\right) \left(\delta^{\nu}_{\sigma} + \eta^{\nu}_{\sigma}\right) \\ &\simeq g_{\rho\sigma} + g_{\rho\nu} \eta^{\nu}_{\sigma} + g_{\mu\sigma} \eta^{\mu}_{\rho} \\ \Longrightarrow 0 &= g_{\rho\nu} \eta^{\nu}_{\sigma} + g_{\sigma\mu} \eta^{\mu}_{\rho} \end{aligned} \tag{2.58}$$

$\Longrightarrow g_{\rho\nu} \eta^{\nu}_{\sigma} \equiv \varepsilon_{\rho\sigma}$ antisymmetrisch $(\eta_{\rho\sigma}) \Longrightarrow$ nur 6 unabhängige Parameter.

$$\hookrightarrow \underbrace{g^{\lambda\rho} g_{\rho\nu}}_{=\delta^{\lambda}_{\nu}} \eta^{\nu}_{\sigma} = g^{\lambda\rho} \varepsilon_{\rho\sigma} \tag{2.59}$$

$$\eta^\lambda_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & g^{0\rho}\varepsilon_{\rho 1} & g^{0\rho}\varepsilon_{\rho 2} & g^{0\rho}\varepsilon_{\rho 3} \\ g^{1\rho}\varepsilon_{\rho 0} & 0 & g^{1\rho}\varepsilon_{\rho 2} & g^{1\rho}\varepsilon_{\rho 3} \\ g^{2\rho}\varepsilon_{\rho 0} & g^{2\rho}\varepsilon_{\rho 1} & 0 & g^{2\rho}\varepsilon_{\rho 3} \\ g^{3\rho}\varepsilon_{\rho 0} & g^{3\rho}\varepsilon_{\rho 1} & g^{3\rho}\varepsilon_{\rho 2} & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{01} & \varepsilon_{02} & \varepsilon_{03} \\ -\varepsilon_{10} = \varepsilon_{01} & 0 & -\varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{20} = \varepsilon_{02} & -\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} & 0 & -\varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{30} = \varepsilon_{03} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.60}$$

Für jeden Parameter haben wir dann eine Matrix:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.63}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.64}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.65}$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{2.66}$$

wobei (2.61), (2.62) und (2.63) die Erzeugenden infinitesimaler Rotationen und (2.64), (2.65) und (2.66) die Erzeugenden infinitesimaler Boosts sind. Damit kann man die Matrix η wie folgt schreiben:

$$\eta = -\vec{\omega} \cdot \vec{S} - \vec{\zeta} \cdot \vec{K}, \tag{2.67}$$

wobei $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ und $\vec{\zeta}$ konstante Vektoren sind.

Die Matrizen S_i und K_i, $i = 1, 2, 3$ haben weiterhin folgende Eigenschaften.

i) Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} [S_i, S_j] &= \varepsilon_{ijk} S_k \qquad ([A,B] = AB - BA) \\ [S_i, K_j] &= \varepsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] &= -\varepsilon_{ijk} S_k \end{aligned} \tag{2.68}$$

Diese ist die reelle Lie-Algebra SO(3,1): $\{a \mid M(4\times 4, \Re)$, so daß $a^T g + ga = 0\}$.

<u>Def.</u>: Reelle Lie–Algebra $\mathcal{L}$

Eine reelle Lie-Algebra $\mathcal{L}$ der Dimension $n \geq 1$ ($\longrightarrow$ Anzahl der Erzeugenden) ist ein reeller Vektorraum der Dimension n mit einem Lie-Produkt oder Kommutator $[a,b]$, der für alle a und $b \in \mathcal{L}$ definiert ist. Weiterhin gilt:

i) $[a,b] \in \mathcal{L} \; \forall \, a, b \in \mathcal{L}$

ii) $[\alpha a + \beta b, c] = \alpha[a,c] + \beta[b,c] \, \forall \, a,b,c \in \mathcal{L}$ und $\forall \, \alpha, \beta \in \Re$

iii) $[a,b] = -[b,a] \; \forall \, a, b \in \mathcal{L}$

iv) $\forall \, a,b,c, \in \mathcal{L}$ gilt $[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$. (Jacobi–Identität)

Im Fall von Matrizen: $[a,b] = ab - ba$. Da $\mathcal{L}$ ein Vektorraum ist, existiert eine Basis $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Weiterhin $[a_p, a_q] \in \mathcal{L}$.

$$\Longrightarrow [a_p, a_q] = c^r_{pq} a_r \qquad p, q = 1, \ldots, n\,. \tag{2.69}$$

Die c^r_{pq} werden Strukturkonstanten von $\mathcal{L}$ genannt.

---

ii) Quadrate der Erzeugenden.

$$\begin{aligned} S_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; S_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ S_3^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; K_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ K_2^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; K_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.70}$$

S_i^2 und K_i^2 sind diagonal. Aus der Lie-Algebra kann die gesamte Gruppe konstruiert werden (es gibt Einschränkungen siehe z.B. J.F. Cornwell, "Group Theory in Physics", Band 2, Kap. 10, Abs. 5, Theorem VII).

Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} L &= \mathrm{e}^{\bar{\eta}}, \qquad L \text{ eine LT} \\ \longrightarrow \det L &= \det\left(e^{\bar{\eta}}\right) = \mathrm{e}^{S_p \bar{\eta}} \, . \end{aligned} \tag{2.71}$$

$\bar{\eta}$ soll noch bestimmt werden.

Annahme: M kann diagonalisiert werden $\Longrightarrow \exists\ U$, so daß $U^{-1}MU = M_D$ (Ähnlichkeitstransformation)

$$\begin{aligned} \longrightarrow \det M &= \det(UM_DU^-1) = \det M_D \\ &= \prod_i m_i \, , \qquad m_i : \text{Eigenwerte} \\ \longrightarrow SpM &= Sp\left(UM_DU^{-1}\right) \\ &= Sp\left(U^{-1}UM_D\right) = \sum_i m_i \\ \Longrightarrow \det\left(\mathrm{e}^{\bar{\eta}}\right) &= \prod_i \mathrm{e}^{\bar{\eta}_i} = \mathrm{e}^{\sum_i \bar{\eta}_i} = \mathrm{e}^{Sp\bar{\eta}} \end{aligned} \tag{2.72}$$

η reel $\Longrightarrow$ det $L = -1$ nicht möglich $\longrightarrow$ diese Konstruktion gilt nur für eigentliche LT. (det $L = 1 \Longrightarrow Sp\,\bar{\eta} = 0$).

L ist eine LT $\Longrightarrow$ es soll gelten

$$gL^Tg = L^{-1} \Longrightarrow \underbrace{g\mathrm{e}^{\bar{\eta}^T}g}_{=\exp g\bar{\eta}^T g} = \mathrm{e}^{-\bar{\eta}} \tag{2.73}$$

da $g^2 = 1$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} g\bar{\eta}^T g &= -\bar{\eta} \Longrightarrow \bar{\eta}^T g + g\bar{\eta} = 0 \\ \bar{\eta} &= \eta \, . \end{aligned} \tag{2.74}$$

D.h. die eigentlichen LT können ganz allgemein als

$$L = \exp\left(-\vec{\omega}\cdot\vec{S} - \vec{\zeta}\cdot\vec{K}\right) \tag{2.75}$$

geschrieben werden. Uneigentliche LT können aus den Elementen von SO(3,1) durch Multiplikation einer Zeit oder Rauminversion:

$$
\begin{aligned}
I_t &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad \det I_t = -1 \\
I_s &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad \det I_s = -1
\end{aligned} \tag{2.76}
$$

erhalten werden.

2.2 Relativistische Quantenmechanik

In diesem Kapitel wollen wir die Quantenmechanik unter der Forderung der Lorentzinvarianz diskutieren. Dies soll letzten Endes zur Quantenfeldtheorie führen. Die Vereinigung mit der allgemeinen Relativitätstheorie, d.h. eine Quantentheorie der Gravitation konnte bisher nicht gefunden werden (aber siehe String–Theorien, z.B. E. Witten, Physics Today, April 1996, S. 24).

2.2.1 Die Schrödinger–Gleichung und Galilei–Transformationen

Die Dynamik nichtrelativistischer Teilchen wird durch die Schrödinger– Gleichung bestimmt:

$$
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = H \psi(\vec{x}, t) \tag{2.77}
$$

Im nichtrelativistischen Bereich der klassischen Physik sind die Bewegungs-Gleichungen invariant gegenüber Galilei-Transformationen. Nun wollen wir sehen, ob das gleiche in der Quantenmechanik gilt. Dazu wollen wir uns an einige Begriffe der Quantenmechanik erinnern.

Wenn wir eine Transformation durchführen, so daß

$$
| u' >= T | u > \tag{2.78}
$$

und diese Transformation einer Symmetrie des Systems entspricht, dann soll die Wahrscheinlichkeit, das System vor der Transformation im Zustand $| v >$ zu finden, gleich der Wahrscheinlichkeit sein, das System nach der Transformation im Zustand $| v' >= T | v >$ zu finden,

$$
|< u' | v' >|^2 = |< u | T^\dagger T | v >|^2 = |< u|v >|^2 \tag{2.79}
$$

für alle $\mid u >, \mid v > \Longrightarrow TT^\dagger = T^\dagger T = 1$. D.h. T soll unitär (oder antiunitär) sein. Weiterhin sollen Mittelwerte von Observablen, falls die Transformation einer Symmetrie des Systems entspricht, invariant bleiben:

$$\begin{aligned} < u' \mid B' \mid u' > &= < u \mid T^\dagger B' T \mid u > = < u \mid B \mid u > \\ \Longrightarrow B' &= T B T^\dagger \end{aligned} \tag{2.80}$$

Schließlich, falls die Transformationen kontinuierlich sind, kann man aus der infinitesimalen Transformation die unitären Operatoren für endliche Transformationen bilden:

$$T(\delta\alpha) = 1 - i\Theta\,\delta\alpha\,. \tag{2.81}$$

T ist unitär

$$\hookrightarrow T(\delta\alpha)\,T^\dagger(\delta\alpha) = \Big(1 - i\Theta\delta\alpha\Big)\Big(1 + i\Theta^\dagger\delta\alpha\Big) = 1 \tag{2.82}$$

$\Longrightarrow \Theta^\dagger = \Theta$. D.h. Θ ist ein hermitescher Operator. Die endliche Transformation ist durch

$$T = \mathrm{e}^{-i\Theta\alpha} \tag{2.83}$$

gegeben.

Für die Galilei–Transformationen (ohne Rotationen, um das Problem so einfach wie möglich zu halten) haben wir eine Translation des Raumes

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{x} - \vec{v}t \tag{2.84}$$

und eine Translation des Impulses:

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - m\vec{v} \tag{2.85}$$

i) Translation des Raumes.
Zunächst betrachten wir eine infinitesimale Translation in x-Richtung

$$\begin{aligned} T(\delta a)\; x\, T^\dagger(\delta a) &= x - \delta a \\ \Longrightarrow \Big(1 - i\Theta\delta a\Big)\, x\, \Big(1 + i\Theta\delta a\Big) &= x + i\delta a\,(x\Theta - \Theta x) \\ &= x + i\delta a\,[x, \Theta] \\ \hookrightarrow [x, \Theta] &= i \\ \Longrightarrow \Theta &= \frac{p_x}{\hbar} \\ \hookrightarrow T(\delta a) &= 1 - i\frac{p_x}{\hbar}\delta a \\ \Longrightarrow T(a) &= \exp\left(-i\frac{p_x a}{\hbar}\right) \end{aligned} \tag{2.86}$$

Für die Galilei–Transformation haben wir

$$\exp\left(-i\,\frac{\vec{p}\cdot\vec{v}t}{\hbar}\right)\,. \tag{2.87}$$

ii) Translation des Impulses (wieder in x-Richtung).

$$\begin{aligned} T(\delta p)\, p_x\, T^\dagger(\delta p) &= p_x - \delta p \\ \hookrightarrow [p_x, \Theta] &= i \Longrightarrow \Theta = -\frac{x}{\hbar} \\ \Longrightarrow T(\delta p) &= 1 + i\,\frac{x}{\hbar}\,\delta p_x \\ \Longrightarrow T(p_x) &= \mathrm{e}^{i\frac{xp_x}{\hbar}} \end{aligned} \tag{2.88}$$

Für die Galilei–Transformation haben wir

$$\exp\left[i\,\frac{\vec{x}\cdot(m\vec{v})}{\hbar}\right] \tag{2.89}$$

Aus *i*) und *ii*) sehen wir, dass eine Galilei–Transformation durch den folgenden Operator gegeben ist:

$$G(\vec{v},t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\,\vec{v}\cdot(m\vec{x} - \vec{p}t)\right] \tag{2.90}$$

Eigentlich ist darauf zu achten, dass, da i.a. $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B \neq \mathrm{e}^{A+B}$ ist, sondern (Haussdorf–Campbell-Baker)

$$\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}[A,B]}\mathrm{e}^{A+B} \tag{2.91}$$

gilt, falls $[A,B]$: c–Zahl. In unserem Fall

$$\left.\begin{array}{rcl} A &=& i\,\frac{m\vec{v}\cdot\vec{x}}{\hbar} \\ B &=& -i\,t\vec{v}\cdot\vec{p} \end{array}\right\} [A,B] = i\,m\vec{v}^2 t \tag{2.92}$$

$\Longrightarrow \exp\left(\frac{1}{2}[A,B]\right)$ ist eine Phase (c-Zahl).

Nun können wir die Schrödinger-Gleichung transformieren:

$$G^\dagger(\vec{v},t)\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right] G(\vec{v},t) \tag{2.93}$$

Dabei nehmen wir $H = \vec{p}^2/2m$.

$$\exp\left[-i\,\vec{v}\cdot(m\vec{x} - \vec{p}t)/\hbar\right]\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\right]\exp\left[i\,\vec{v}\cdot(m\vec{x} - \vec{p}t)/\hbar\right] \tag{2.94}$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{iA}B\mathrm{e}^{-iA} &= B + i[A,B] + \frac{i^2}{2!}[A,[A,B]] \\ &\quad + \cdots + \frac{i^n}{n!}\underbrace{[A,[A,\cdots[A,[A,B]]\cdots]]}_{n-fach} + \cdots \end{aligned} \tag{2.95}$$

Wir müssen folgendes berechnen:

$$\begin{aligned}
A &= -i\vec{v}\cdot(m\vec{x}-\vec{p}t)/\hbar\,, \\
B &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H \\
\hookrightarrow [A,B] &= \left[-i\frac{m}{\hbar}\vec{v}\cdot\vec{x}+i\vec{v}\cdot\vec{p}\frac{t}{\hbar}, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H\right] \\
&= \left[-i\frac{m}{\hbar}\vec{v}\cdot\vec{x}, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right] + \overbrace{\left[\frac{im\vec{v}\cdot\vec{x}}{\hbar}, H\right]}^{(1)} \\
&\quad + \underbrace{\left[+i\vec{v}\cdot\vec{p}\frac{t}{\hbar}, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right]}_{(2)} - \left[\vec{v}\cdot\vec{p}\,\frac{t}{\hbar}, H\right]
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Nun berechnen wir die gekennzeichneten Kommutatoren

$$\begin{aligned}
(1) &= \left[i\frac{m\vec{v}\cdot\vec{x}}{\hbar}, \frac{\vec{p}^2}{2m}\right] \\
&= \frac{iv^\alpha}{2\hbar}\left[x^\alpha, p^\beta p^\beta\right] \\
&= \frac{iv^\alpha}{2\hbar}\left\{p^\beta \underbrace{\left[x^\alpha, p^\beta\right]}_{i\hbar\delta^{\alpha\beta}} + \left[x^\alpha, p^\beta\right]p^\beta\right\} \\
&= -\vec{v}\cdot\vec{p} \\
(2) &= \left[i\vec{v}\cdot\vec{p}\,\frac{t}{\hbar}, i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right] \\
&= -\vec{v}\cdot\vec{p}\left[t, \frac{\partial}{\partial t}\right] \\
&= \vec{v}\cdot\vec{p} \\
\Longrightarrow [A,B] &= 0 \\
\Longrightarrow G^\dagger\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H\right]G &= \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H\right]
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Die Schrödinger–Gleichung ist invariant bezüglich Galilei–Transformationen, d.h. sie ist nicht Lorentzinvariant. Die Schrödinger–Gleichung kann nur für Prozesse mit $v << c$ gültig sein.

2.2.2 Die Klein–Gordon–Gleichung

Um die Notation zu vereinfachen, werden folgende Einheiten eingeführt

$$\begin{aligned} \hbar &= c = 1 \\ [c] &= \frac{L}{T} \longrightarrow [L] = [T] \\ [\hbar] &= E \times T \longrightarrow [E] = T^{-1} = L^{-1} , \end{aligned} \tag{2.98}$$

aus der Elektrostatik

$$\left[\frac{e^2}{L}\right] \sim E \Longrightarrow \left[e^2\right] = E \cdot L \tag{2.99}$$

$\hookrightarrow$ Ladung: dimensionslos. Die elementare Ladung hat den Wert

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} = e^2 . \tag{2.100}$$

Wir versuchen nun aus den Aussagen der klassischen speziellen Relativitätstheorie eine Quantentheorie mit Hilfe des Korrespondenzprinzips aufzustellen.

$$\left.\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \frac{i\partial}{\partial t} \\ \vec{p} & \longrightarrow & -i\vec{\nabla} \end{array}\right\} p^\mu \equiv (E, \vec{p}) \longrightarrow i\partial^\mu . \tag{2.101}$$

Für ein relativistisches Teilchen haben wir den folgenden Ausdruck für die Energie:

$$E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2 = m^2 + \vec{p}^2 . \tag{2.102}$$

Mit Hilfe des Korrespondenzprinzips können wir eine Wellengleichung erhalten:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t} - \vec{\nabla}^2 + m^2\right)\psi &= 0 , \\ \hookrightarrow \left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\psi &= 0 . \end{aligned} \tag{2.103}$$

Dies ist die Klein-Gordon-Gleichung. Sie ist explizit Lorentzinvariant, hat aber eine 2. Zeitableitung anstatt einer 1. Zeitableitung wie in der Schrödinger–Gleichung. Da es sich um eine Differentialgleichung 2. Ordnung handelt, muß man als Anfangsbedingung ψ und $\partial\psi/\partial t$ kennen. Postulieren wir, daß der Zustand des Systems nicht nur durch ψ sondern auch durch $\partial\psi/\partial t$ gegeben ist, können wir den Zustand des Systems durch folgende Linearkombinationen darstellen:

$$\begin{aligned} \Phi &= \psi + \frac{i}{m}\frac{\partial\psi}{\partial t} \\ \chi &= \psi - \frac{i}{m}\frac{\partial\psi}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.104}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \qquad \psi &= \frac{1}{2}(\Phi + \chi) \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= -i\frac{m}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) \end{aligned} \tag{2.105}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall ist die Energie in etwa durch die Ruhemasse gegeben.

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} \simeq m\psi \quad \Longrightarrow \quad \chi << \Phi \, , \tag{2.106}$$

aufgrund von (2.104). Damit haben wir

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \propto \frac{\partial\Phi}{\partial t} \, . \tag{2.107}$$

Indem man Komponenten für die Wellenfunktion einführt, würde man eine Differentialgleichung erster Ordnung erreichen. Es gibt aber weitere Probleme mit der Klein–Gordon–Gleichung.

Die Wellenfunktion kann statistisch gedeutet werden, als die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen am Ort $\vec{x}$ zur Zeit t zu finden:

$$P\left(\vec{x},t\right) = \psi^*\left(\vec{x},t\right)\,\psi\left(\vec{x},t\right) = \mid\psi\left(\vec{x},t\right)\mid^2 \tag{2.108}$$

Dies bedeutet aber, daß

$$\int \mid\psi\left(\vec{x},t\right)\mid^2 \mathrm{d}^3x = 1, \tag{2.109}$$

was die Norm der Wellenfunktion festlegt. Daraus folgt, daß die Norm zeitlich konstant bleiben muß. Dies ergibt sich aus der Schrödinger–Gleichung.

$$\left.\begin{array}{rcl} i\frac{\partial}{\partial t}\psi &=& H\psi \\ i\frac{\partial}{\partial t}\psi^* &=& -\left(H\psi\right)^* \end{array}\right\} \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial t}\mid\psi\mid^2 &=& \psi^*\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right)\psi \\ &=& \frac{1}{i}\left[\psi^*\left(H\psi\right) - \left(H\psi\right)^*\psi\right] \\ \Longrightarrow \quad \frac{\partial N^2}{dt} &=& \frac{1}{i}\int d^3r\left[\psi^*\left(H\psi\right) - \left(H\psi\right)^*\psi\right] = 0, \end{array} \tag{2.110}$$

da H hermitisch ist. Die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\mid\psi\mid^2 = \frac{1}{i}\left[\psi^*\left(H\psi\right) - \left(H\psi\right)^*\psi\right] \tag{2.111}$$

hat die Form einer Kontinuitätsgleichung, wobei

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = i\left[\psi^*\left(H\psi\right) - \left(H\psi\right)^*\psi\right] \tag{2.112}$$

Nun wollen wir sehen, ob die Klein–Gordon–Gleichung dieselben Eigenschaften hat:

$$\begin{array}{rcl} \psi^*\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\psi &=& 0 \\ \psi\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\psi^* &=& 0 \\ \hookrightarrow \psi^*\Box\psi - \left(\Box\psi^*\right)\psi &=& 0 \end{array} \tag{2.113}$$

Ähnlich wie in der nichtrelativistischen Quantenmechanik können wir den Strom wie folgt definieren.

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{i}{2m}\left[\psi^*\partial^\mu\psi - \left(\partial^\mu\psi^*\right)\psi\right] \\ \Longrightarrow \partial_\mu j^\mu &= \frac{i}{2m}\left[\partial_\mu\psi^*\partial^\mu\psi + \psi^*\partial_\mu\partial^\mu\psi - \left(\partial_\mu\partial^\mu\psi^*\right)\psi - \partial^\mu\psi^*\partial_\mu\psi\right] \\ &= \frac{i}{2m}\left[\psi^*\Box\psi - \left(\Box\psi^*\right)\psi\right] = 0\ . \end{aligned} \tag{2.114}$$

$\Longrightarrow$ Dieser Strom erfüllt eine Kontinuitätsgleichung, aber

$$\rho = j^0 = \frac{i}{2m}\left[\psi^*\frac{\partial}{\partial t}\psi - \left(\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\right)\psi\right] \tag{2.115}$$

ist nicht positiv definit! D.h., ρ kann nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden. Da aber eine Kontinuitätsgleichung existiert, kann ρ als Dichte (z.B. Ladungsdichte) verstanden werden und die entsprechende Ladung bleibt erhalten.

Es gibt ein weiteres Problem. Eine Lösung der Klein–Gordon–Gleichung ist,

$$\begin{aligned} \psi\left(\vec{r},t\right) &= \exp\left[-i\left(Et - \vec{p}\cdot\vec{x}\right)\right] \\ \hookrightarrow \left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\psi &= \left(-E^2 + \vec{p}^2 + m^2\right)\psi = 0 \\ \Longrightarrow E &= \pm\sqrt{p^2+m^2} \end{aligned} \tag{2.116}$$

Die Lösungen mit negativer Energie sind genauso gültig, wie diejenigen mit positiver Energie. Gibt es keinen Grundzustand?

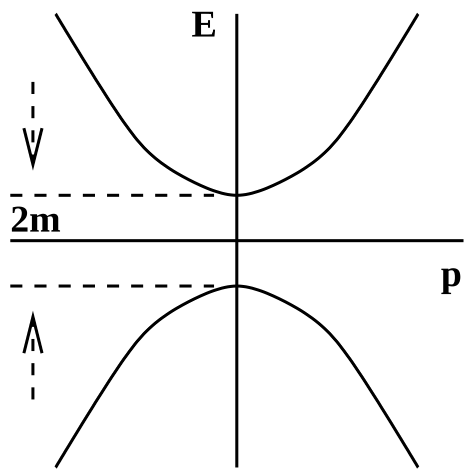

Abbildung 3: Energiedispersion für die Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung.

In der klassischen Relativitätstheorie hatten wir

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} \tag{2.117}$$

wir dürfen nur die positive Wurzel nehmen.

2.2.3 Die Dirac-Gleichung

Hier wird eine relativistische Bewegungsgleichung gesucht, die analog zur Schrödinger-Gleichung ist und darüberhinaus zu einer positiven Wahrscheinlichkeitsverteilung führt. Vorhin haben wir gesehen, daß die Wellenfunktion bei der Klein–Gordon–Gleichung als ein zweikomponentiger Vektor angesehen werden kann. Deswegen werden hier zunächst mehrere Komponenten erlaubt.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \tag{2.118}$$

Dies ist auch eine natürliche Annahme, wenn man an ein Elektron mit Spin denkt. In diesem Fall hat man

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} \tag{2.119}$$

Darüberhinaus werden folgende Forderungen gestellt:

1. Die Komponenten von ψ erfüllen die Klein–Gordon–Gleichung $\Longrightarrow$ ebene Wellen mit $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ sollen Lösungen sein. Damit soll das Korrespondenzprinzip berücksichtigt werden.

2. Es existiert ein Viererstrom, wobei j^0 eine positive Dichte ist.

3. Die Komponenten von ψ sind unabhängige Funktionen von x^μ zu jedem Zeitpunkt.

Bemerkungen:

- Wegen der Schrödinger Gleichung erwarten wir auch, daß die Wellengleichung linear in $\partial/\partial t$ ist.

- Wegen der Lorentzinvarianz sollen nur lineare Ableitungen nach den Raumkoordinaten auftreten.

$$\Longrightarrow H_D = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m \tag{2.120}$$

Dabei ist $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$ nach der Korrespondenzregel. $\vec{\alpha}$ und β sind hermitesche Operatoren, die auf die internen Freiheitsgrade wirken (die Komponenten von ψ). Die Wellen-Gleichung ist dann

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - H_D \right] \psi = 0\ . \tag{2.121}$$

Nun verlangen wir, daß Forderung 1 erfüllt wird. Dazu multiplizieren (2.121) von links

$$\begin{aligned}\left[i\frac{\partial}{\partial t}+H_D\right]\left[i\frac{\partial}{\partial t}-H_D\right]\psi &= 0\\ \Longrightarrow -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi &= \left(\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+\beta m\right)^2\psi \end{aligned} \tag{2.122}$$

Nun sollen $\vec{\alpha}$ und β so gewählt werden, daß die Klein–Gordon–Gleichung resultiert:

$$\begin{aligned}\left[\sum_i \alpha^i p^i+\beta m\right]^2 &= \sum_{ij}\alpha^i\alpha^j p^i p^j + m\sum_i \alpha^i\beta p^i + m\sum_i \beta\alpha^i p^i + \beta^2 m^2\\ &= \sum_i \left(\alpha^i\right)^2\left(p^i\right)^2 + \sum_{i<j}\left(\alpha^i\alpha^j+\alpha^j\alpha^i\right)p^ip^j\\ &\quad + m\sum_i\left(\alpha^i\beta+\beta\alpha^i\right)p^i+\beta^2m^2\ .\end{aligned} \tag{2.123}$$

Man erhält die Klein–Gordon–Gleichung, falls

$$\begin{array}{rclrcl} \left(\alpha^i\right)^2 &=& 1 & \qquad \alpha^i\alpha^j+\alpha^j\alpha^i &=& 0\\ \beta^2 &=& 1 & \alpha^i\beta+\beta\alpha^i &=& 0\ . \end{array} \tag{2.124}$$

D.h. die vier Operatoren α^i und β antivertauschen und ihr Quadrat ist 1. Mit Hilfe dieser Bedingungen soll der (Hilbert)–Raum der internen Freiheitsgrade konstruiert werden. Sei $\mid \alpha^i >$ (bzw. $\mid \beta >$) ein Eigenzustand von α^i (bzw. β) mit Eigenwert a^i (bzw. b). Dann:

$$\begin{aligned}\left(\alpha^i\right)^2\mid\alpha^i> &= \left(a^i\right)^2\mid\alpha^i>=\mid\alpha^i>\\ \Longrightarrow a^i\ (\text{bzw. } b) &= \pm 1.\end{aligned} \tag{2.125}$$

Weiterhin betrachten wir die $N\times N$ Matrizen, welche eine Darstellung von α^i bzw. β geben:

$$\det\left(\alpha^i\alpha^j\right)=\det\left(-\alpha^j\alpha^i\right)=(-1)^N\det\left(\alpha^i\alpha^j\right) \tag{2.126}$$

$\Longrightarrow N$ kann nur gerade sein.

Für $N=2$ gibt es nur 3 antikommutierende Matrizen (und nicht 4) $\longrightarrow$ Pauli–Matrizen $\Longrightarrow N\geq 4$. Mit Hilfe der Pauli–Matrizen kann man eine Darstellung der vier Matrizen angeben:

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix},\qquad \alpha^i=\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ \sigma^i & 0\end{pmatrix}, \tag{2.127}$$

wobei

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{2.128}$$

und σ^i sind die Pauli–Matrizen:

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.129}$$

Dadurch kann man sehen, daß die oben angegebenen Bedingungen erfüllt werden. Um die Kovarianz der Dirac–Gleichung zu zeigen, wird eine weitere Notation eingeführt:

$$\gamma^\mu \equiv \left(\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\right), \tag{2.130}$$

wobei

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \beta\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.131}$$

Nun kann die Dirac–Gleichung folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\alpha}\cdot\vec{p} - \beta m\right)\psi &= 0 \\ \hookrightarrow \left[i\beta\frac{\partial}{\partial t} - \beta\alpha^j\left(-i\frac{\partial}{\partial x^j}\right) - m\right]\psi &= 0 \\ \Longrightarrow \left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi &= 0 \end{aligned} \tag{2.132}$$

Dies ist die kovariante Form der Dirac–Gleichung. Nun leiten wir eine Dirac–Gleichung für $\psi^\dagger$ ab, um eine positiv definierte Wahrscheinlichkeitsdichte $\mid \psi \mid^2 = \psi^\dagger\psi$ zu erhalten.

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi \longrightarrow \psi^\dagger\left(+i\gamma^{\mu\dagger}\overleftarrow{\partial_\mu} + m\right) = 0\,. \tag{2.133}$$

Da die Pauli–Matrizen, bzw. die Operatoren α^i und β hermitesch sind, hat man:

$$\begin{aligned} \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 = \gamma^0\gamma^0\gamma^0 \\ \gamma^{i\dagger} &= \left(\beta\alpha^i\right)^\dagger = \alpha^i\beta = \beta\beta\alpha^i\beta = \gamma^0\gamma^i\gamma^0\,. \end{aligned} \tag{2.134}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \psi^\dagger\left(i\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\overleftarrow{\partial_\mu} + \gamma^0\gamma^0 m\right) &= 0 \\ \hookrightarrow \psi^\dagger\gamma^0\left(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial_\mu} + m\right) &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.135}$$

<u>Def.</u>: $\psi^\dagger\gamma^0 \equiv \bar{\psi}$

$$\Longrightarrow \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial_\mu} + m\right) = 0 \tag{2.136}$$

Nun multiplizieren wir die Dirac–Gleichung mit $\bar{\psi}$ von links und die adjungierte Gleichung mit ψ von rechts:

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \overrightarrow{\partial_\mu} - m\right)\psi &= 0 \\
\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial_\mu} + m\right)\psi &= 0 \\
\Longrightarrow \bar{\psi}\left(\gamma^\mu \overrightarrow{\partial_\mu} + \gamma^\mu \overleftarrow{\partial_\mu}\right)\psi &= \partial_\mu \underbrace{\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right)}_{j^\mu} = 0\ . \qquad (2.137)
\end{aligned}
$$

Damit hat man einen Viererstrom

$$
j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \begin{cases} j^0 = \rho = \bar{\psi}\gamma^0\psi \\ \quad = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \\ j^i = \bar{\psi}\gamma^i\psi = \psi^\dagger\gamma^0\beta\alpha^i\psi \\ \quad = \psi^\dagger\alpha^i\psi \end{cases} \qquad (2.138)
$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = \psi^\dagger\psi$ ist positiv definit. Sie erfüllt die Kontinuitätsgleichung.

$$
\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) = 0\ . \qquad (2.139)
$$

2.2.4 Transformationseigenschaften der Dirac–Gleichung

Eigenschaften der Dirac–Matrizen γ^μ

a) $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I$.

α) $\mu = \nu = 0$.

$$
\Longrightarrow \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\left(\gamma^0\right)^2 = 2\beta^2 = 2I = 2g^{00}I\ .
$$

β) $\mu = \nu = i = 1, 2, 3\,, \quad \gamma^i = \beta\alpha^i$

$$
\hookrightarrow \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\beta \underbrace{\alpha^i\beta}_{-\beta\alpha^i} \alpha^i = -2\beta^2\left(\alpha^i\right)^2 = -2I = 2g^{ii}I\ .
$$

γ) $\mu = 0, \nu = i$.

$$
\Longrightarrow \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \beta\beta\alpha^i + \underbrace{\beta\alpha^i}_{-\alpha^i\beta}\beta = 0\ .
$$

δ) $\mu = i \neq \nu = j$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= \beta \underbrace{\alpha^i\beta}_{-\beta\alpha^i} \alpha^j + \beta \underbrace{\alpha^j\beta}_{-\beta\alpha^j} \alpha^i \\
&= -\left(\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i\right) = 0 \qquad (2.140)
\end{aligned}
$$

b) Die Matrix γ^5.

Def. $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

Sie hat folgende Eigenschaften:

α) $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$.

$$\hookrightarrow \gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \; .$$

Mit $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0$ für $\mu \neq \gamma \Longrightarrow \gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$.

β) $(\gamma^5)^2 = -I$.

$$\begin{aligned} \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 &= -\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ &= \gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3 = -\left(\gamma^2\right)^2\left(\gamma^3\right)^2 = -I \; . \end{aligned} \tag{2.141}$$

Kovarianz der Dirac–Gleichung

$$K: \qquad i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi(x) - m\psi(x) = 0 \tag{2.142}$$

$$K': \qquad i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\psi'(x') - m\psi'(x') = 0, \tag{2.143}$$

wobei $x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu$ erfüllt und L^μ_ν eine Lorentz-Transformation ist. Wir nehmen an, daß zwischen ψ' und ψ eine lineare, lokale Beziehung besteht.

$$\psi'(x') = \Lambda(L)\,\psi(x)\,, \tag{2.144}$$

wobei Λ eine nichtsinguläre (die Inverse muß existieren) 4×4 Matrix ist. Wir können nun (2.143) folgendermaßen schreiben:

$$i\gamma^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\,\Lambda(L)\,\psi(x) - m\,\Lambda(L)\,\psi(x) = 0 \tag{2.145}$$

Multipliziere von links mit $\Lambda^{-1}(L)$ und vergleiche mit (2.142). Da dies für alle $\psi(x)$ gültig ist

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}(L)\,\gamma^\mu\left(L^{-1}\right)^\nu_\mu\Lambda(L) &= \gamma^\nu \\ \Lambda(L)\,\gamma^\mu\Lambda^{-1}(L) &= \left(L^{-1}\right)^\mu_\nu\gamma^\nu \; . \end{aligned} \tag{2.146}$$

Um die Matrix Λ explizit zu konstruieren, betrachten wir infinitesimale eigentliche Lorentztransformationen:

$$\begin{aligned} L^\mu_\nu &= \delta^\mu_\nu + \eta^\mu_\nu \\ \hookrightarrow \left(L^{-1}\right)^\mu_\nu &\simeq g^\mu_\nu - \eta^\mu_\nu \end{aligned} \tag{2.147}$$

In erster Ordnung sollen die Matrizen Λ die folgende Form haben:

$$\begin{aligned}\Lambda(L) &= I - \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} + \cdots \\ \Lambda^{-1}(L) &= I + \frac{i}{4}\,\sigma_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} + \cdots \end{aligned} \tag{2.148}$$

Da $\eta^{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist, soll $\sigma_{\mu\nu}$ auch antisymmetrisch sein. Mit Hilfe der Bedingung (2.146) erhält man:

$$\begin{aligned}\left(I - \frac{i}{4}\,\sigma_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta}\right)\gamma^\mu\left(I + \frac{i}{4}\,\sigma_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta}\right) &= \gamma^\mu + \frac{i}{4}\left[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}\right]\eta^{\alpha\beta} \\ &= \left(g^\mu_\nu - \eta^\mu_\nu\right)\gamma^\nu = \gamma^\mu - \eta^\mu_\nu\gamma^\nu \\ \Longrightarrow \left[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}\right]\eta^{\alpha\beta} &= 4i\,\eta^\mu_\nu\,\gamma^\nu \end{aligned} \tag{2.149}$$

Bei der Diskussion der Lorentztransformationen haben wir gesehen, dass $\eta_{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist und durch 6 Parameter bestimmt wird. Wir können schreiben

$$\eta_{\lambda\rho} = \varepsilon^{\kappa\eta}\left(g_{\lambda\kappa}\,g_{\rho\eta} - g_{\lambda\eta}\,g_{\rho\kappa}\right)\ , \tag{2.150}$$

wobei $\varepsilon^{\kappa\eta}$ infinitesimal ist. Wir können sogar $\varepsilon^{\kappa\eta} = \epsilon$ wählen. Durch Ersetzen dieser Form in (2.149) erhalten wir:

$$\begin{aligned} (\text{links}): &\quad \left[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}\right]\eta^{\alpha\beta} = \left[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}\right] g^{\alpha\lambda}\eta_{\lambda\rho}g^{\rho\beta} = 2\epsilon\left[\gamma^\mu, \sigma_{\kappa\eta}\right] \\ (\text{rechts}): &\quad \eta^\mu_\nu\gamma^\nu = g^{\mu\lambda}\eta_{\lambda\rho}\gamma^\rho = \epsilon\left(\delta^\mu_\kappa\,\gamma_\eta - \delta^\mu_\eta\,\gamma_\kappa\right) = \epsilon\left(g^\mu_\kappa\,\gamma_\eta - g^\mu_\eta\,\gamma_\kappa\right) \\ \Longrightarrow &\quad \left[\gamma^\mu, \sigma_{\alpha\beta}\right] = 2i\left(g^\mu_\alpha\,\gamma_\beta - g^\mu_\beta\,\gamma_\alpha\right)\ . \end{aligned} \tag{2.151}$$

Matrizen $\sigma_{\alpha\beta}$, welche diese Beziehung genügen, sind wie folgt:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\left[\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right] = i\gamma_\alpha\gamma_\beta\ . \tag{2.152}$$

Dies kann man einfach zeigen:

$$\frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma_\alpha\gamma_\beta\right] = \frac{i}{2}g_{\alpha\lambda}\,g_{\beta\rho}\,\left[\gamma^\mu, \gamma^\lambda\gamma^\rho\right]\ . \tag{2.153}$$

Für den Kommutator haben wir

$$\begin{aligned}\left[\gamma^\mu, \gamma^\lambda\gamma^\rho\right] &= \gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\rho - \gamma^\lambda\gamma^\rho\gamma^\mu \\ &= \gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\rho - 2g^{\rho\mu}\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\rho \\ &= 2\left(g^{\lambda\mu}\gamma^\rho - g^{\rho\mu}\gamma^\lambda\right) \\ \hookrightarrow \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma_\alpha\gamma_\beta\right] &= i\left(g^\mu_\alpha\gamma_\beta - g^\mu_\beta\gamma_\alpha\right)\end{aligned} \tag{2.154}$$

Damit ist eine endliche Transformation durch

$$\Lambda(L) = \exp\left(-\frac{i}{4}\,\sigma_{\alpha\beta}\,\eta^{\alpha\beta}\right) \tag{2.155}$$

gegeben.

2.2.5 Drehungen und Spin

Wir betrachten eine Drehung um die z–Achse um ein Winkel φ. Im allgemeinen haben wir

$$\eta^{\mu}_{\nu} = -\vec{\omega} \cdot \vec{S}^{\mu}_{\nu} - \vec{\zeta} \cdot \vec{K}^{\mu}_{\nu} \,. \tag{2.156}$$

Da wir nur eine Rotation betrachten, ist $\vec{\zeta} = 0$. Weiterhin ist $\vec{\omega} = (0, 0, \varphi)$. Daraus ergibt sich

$$\eta^{\mu}_{\nu} = -\varphi S_3 \,, \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,. \tag{2.157}$$

Wir brauchen aber $\eta^{\mu\nu} = \eta^{\mu}_{\rho} g^{\rho\nu}$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \eta^{\mu\nu} &= \varphi \left(S_3\right)^{\mu\nu} = -\varphi \left(\delta^{\mu}_{1} \delta^{\nu}_{2} - \delta^{\mu}_{2} \delta^{\nu}_{1}\right) \\ \hookrightarrow \sigma_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu} &= -\varphi \left(\sigma_{12} - \sigma_{21}\right) = -2\varphi\sigma_{12} = -2i\,\varphi\,\gamma_1\gamma_2 \end{aligned} \tag{2.158}$$

Weiterhin

$$\begin{aligned} \gamma_1\gamma_2 &= g_{1\mu}\gamma^{\mu} g_{2\nu}\gamma^{\nu} = \left(-\gamma^1\right)\left(-\gamma^2\right) = \gamma^1\gamma^2 = \beta\alpha^1\beta\alpha^2 = -\alpha^1\alpha^2 \\ \hookrightarrow \sigma_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} &= 2i\,\varphi\,\alpha^1\alpha^2 \end{aligned} \tag{2.159}$$

Nun

$$\alpha^1\alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^x \\ \sigma^x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^y \\ \sigma^y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^x\sigma^y & 0 \\ 0 & \sigma^x\sigma^y \end{pmatrix} \,. \tag{2.160}$$

Da $\sigma^x\sigma^y = i\sigma^z \Longrightarrow \alpha^1\alpha^2 = iI\sigma^z$. Schließlich folgt:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta} &= -\frac{i}{4}\left(2i\varphi\right)\left(i\sigma^z\right) = i\frac{\varphi}{2}\,\sigma^z \\ \hookrightarrow \Lambda\left(L\right) &= e^{i\frac{\varphi}{2}\sigma^z} = \cos\frac{\varphi}{2} + i\sigma^z \sin\frac{\varphi}{2} \end{aligned} \tag{2.161}$$

Dies ist aber der Drehoperator für ein Spin–1/2 Teilchen (nach einer Drehung um $2\pi \Longrightarrow \psi \longrightarrow -\psi$). Die Dirac–Gleichung beschreibt Spin–1/2 Teilchen.

2.2.6 Freies massives Teilchen

Wir betrachten nun die Dirac–Gleichung für freie massive Teilchen:

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi = 0 \tag{2.162}$$

Die Lösung hat die Form einer ebenen Welle:

$$\psi\left(x\right) = e^{-ik_{\mu}x^{\mu}}\,w\left(k\right) \tag{2.163}$$

Durch Einsetzen dieser Form in die Dirac–Gleichung hat man:

$$(\gamma^\mu k_\mu - m)\; w\,(k) = 0 \tag{2.164}$$

Im ruhenden Bezugssystem des Teilchens ist $k^\mu = \left(E, \vec{0}\right)$

$$\Longrightarrow \left(\gamma^0 E - m\right)\; w\,(k) = 0 \tag{2.165}$$

Für γ^0 haben wir

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{2.166}$$

Damit hat (2.165) folgende Lösungen:

a) $E = m$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & -2m & \\ & & & -2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^{(1)}(k) \\ w^{(2)}(k) \\ w^{(3)}(k) \\ w^{(4)}(k) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow w^{(3)}(k) = w^{(4)}(k) = 0\,. \tag{2.167}$$

Diese Lösung für positive Energien nennen wir

$$u^{(1)}(m,\vec{0}) \equiv w^{(1)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u^{(2)}(m,\vec{0}) \equiv w^{(2)}(m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.168}$$

wobei wir die Lösungen (ortho)normiert haben.

b) $E = -m$.

$$\begin{pmatrix} -2m & & & \\ & -2m & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^{(1)}(k) \\ w^{(2)}(k) \\ w^{(3)}(k) \\ w^{(4)}(k) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow w^{(1)}(k) = w^{(2)}(k) = 0\,. \tag{2.169}$$

Diese Lösungen für negative Energien nennen wir

$$
\begin{aligned}
v^{(1)}(m,\vec{0}) &\equiv w^{(3)}(-m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \\
v^{(2)}(m,\vec{0}) &\equiv w^{(4)}(-m,\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.170}
$$

Bemerkungen:

a. Es gibt immer noch Lösungen mit negativen Energien!

b. Für jede Energie gibt es zwei entartete Lösungen.

Für alle anderen Bezugssysteme hat das Teilchen eine von Null verschiedene Geschwindigkeit und somit einen Viererimpuls $k^\mu = \left(E, \vec{k}\right)$. Die Lösungen der Dirac–Gleichung sollen aber auch Lösungen der Klein–Gordon–Gleichung sein.

$$
\Longrightarrow E^2 = \vec{k}^2 + m^2 \tag{2.171}
$$

Wir bekommen weiterhin Lösungen für positive und negative Energien.

$$
E = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \; . \tag{2.172}
$$

Die dazugehörigen Spinoren haben die folgende Form:

$$
\begin{aligned}
u^{(\alpha)} &= \frac{1}{\sqrt{2m(m+k_0)}} \begin{pmatrix} k_0 + m & \varphi^{(\alpha)} \\ \vec{k}\cdot\vec{\sigma} & \varphi^{(\alpha)} \end{pmatrix} , \\
v^{(\alpha)} &= -\frac{1}{\sqrt{2m(m+k_0)}} \begin{pmatrix} \vec{k}\cdot\vec{\sigma} & \chi^{(\alpha)} \\ k_0 + m & \chi^{(\alpha)} \end{pmatrix} ,
\end{aligned} \tag{2.173}
$$

wobei die Spinoren $\varphi^{(\alpha)}$ und $\chi^{(\alpha)}$ wie folgt sind:

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \varphi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \\
\chi^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{2.174}
$$

Die Normierung in (2.173) wurde so gewählt, daß

$$
\begin{aligned}
\bar{u}^{(\alpha)}\, u^{(\beta)} &= \delta_{\alpha\beta} , \qquad \bar{u}^{(\alpha)}\, v^{(\beta)} = 0 , \\
\bar{v}^{(\alpha)}\, v^{(\beta)} &= -\delta_{\alpha\beta} , \qquad \bar{v}^{(\alpha)}\, u^{(\beta)} = 0 .
\end{aligned} \tag{2.175}
$$

Die zweifache Entartung kann nur mit einer neuen Quantenzahl (Spin) zu tun haben, wobei es für die Spin–Quantenzahl $S = 1/2$ zwei mögliche Projektionen ($S^z = \pm 1/2$) gibt.

2.2.7 Ladungskonjugation und Antiteilchen

In der Anwesenheit eines EM–Feldes soll die Dirac–Gleichung erweitert werden. Wir haben schon im klassischen Fall gesehen, daß der kanonische Impuls in Anwesenheit eines EM–Feldes wie folgt aussieht:

$$p_\mu = m u_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \tag{2.176}$$

Korrespondenzprinzip:

$$\begin{array}{ccc} p_\mu & \longrightarrow & p_\mu - eA_\mu \\ \downarrow & & \downarrow \\ i\partial_\mu & & i\left(\partial_\mu + ieA_\mu\right) \ , \end{array} \tag{2.177}$$

wobei wir $c = 1$ gesetzt haben. Damit geht die Dirac–Gleichung in die folgende Form über

$$\left[i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + ieA_\mu\right) - m\right] \psi\left(x\right) = 0 \ . \tag{2.178}$$

Diese Form ("minimal coupling") gewährleistet die Eichinvarianz. Bei einer Eichtransformation hat man

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda\left(x\right) \ . \tag{2.179}$$

Dabei bekommt die Wellenfunktion eine Phase:

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \mathrm{e}^{-ie\Lambda(x)}\, \psi\left(x\right) \\ \longrightarrow \partial_\mu\, \psi'(x) + ieA'_\mu\, \psi'(x) &= -ie\, \partial_\mu \Lambda(x)\, \psi'(x) + \mathrm{e}^{-ie\Lambda(x)}\, \partial_\mu \psi(x) \\ &\quad + ieA_\mu\, \mathrm{e}^{-ie\Lambda(x)}\, \psi(x) + ie\, \partial_\mu \Lambda(x)\, \psi'(x) \\ &= \mathrm{e}^{-ie\Lambda(x)} \left[\partial_\mu \psi(x) + ieA_\mu \psi(x)\right] \ . \end{aligned} \tag{2.180}$$

Falls ψ die Dirac–Gleichung erfüllt, dann gilt dies auch für $\psi'\left(x\right)$.

Nun werden wir sehen, daß, falls $\psi\left(x\right)$ eine Lösung der Dirac–Gleichung für eine Ladung e ist, eine Lösung für die Ladung $-e$ gefunden werden kann (Ladungskonjugation). Dafür nehmen wir die adjungierte Dirac–Gleichung

$$\begin{aligned} \psi^\dagger \left(-i\gamma^{\mu\dagger} \overleftarrow{\partial_\mu} - e\gamma^{\mu\dagger} A_\mu - m\right) &= 0 \\ \hookrightarrow \bar{\psi} \left[\gamma^\mu \left(-i \overleftarrow{\partial_\mu} - eA_\mu\right) - m\right] &= 0 \end{aligned} \tag{2.181}$$

und transponieren sie noch einmal:

$$\left[\gamma^{\mu T} \left(-i\partial_\mu - eA_\mu\right) - m\right] \bar{\psi}^T = 0 \ . \tag{2.182}$$

Wir bemerken, daß eine Matrix C existiert, welche die folgende Beziehung erfüllt:

$$\begin{aligned} C\gamma^{\mu T}C^{-1} &= -\gamma^{\mu} \\ \hookrightarrow C = i\gamma^2\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^y \\ -i\sigma^y & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{2.183}$$

Es gilt: $-C = C^{-1} = C^T = C^\dagger$.

Um die Gültigkeit von (2.183) zu überprüfen muss man sehen, dass:

$$\gamma^{0^T} = \gamma^0 ; \quad \gamma^{1^T} = -\gamma^1 ; \quad \gamma^{2^T} = \gamma^2 ; \quad \gamma^{3^T} = -\gamma^3 . \tag{2.184}$$

Damit hat man:

$$C\gamma^{\mu T}C^{-1} = \begin{cases} \mu = 0 \longrightarrow & \gamma^2\gamma^0\gamma^0\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0 \\ \mu = 1 \longrightarrow & -\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^1 \\ \mu = 2 \longrightarrow & \gamma^2\gamma^0\gamma^2\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^2 \\ \mu = 3 \longrightarrow & -\gamma^2\gamma^0\gamma^3\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^3 \end{cases} \tag{2.185}$$

Damit kann man schreiben

$$\begin{aligned} C\left[\gamma^{\mu T}\left(-i\partial_\mu - eA_\mu\right) - m\right] C^{-1}C\bar{\psi}^T = 0 \\ \hookrightarrow \left[i\gamma^\mu\left(\partial_\mu - ieA_\mu\right) - m\right]\psi^c = 0, \end{aligned} \tag{2.186}$$

wobei $\psi^c \equiv C\bar{\psi}^T$ die ladungskonjugierte Lösung ist. In dem Bezugssystem, in dem das Teilchen sich in Ruhe befindet, haben wir z.B.

$$\psi = \mathrm{e}^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{2.187}$$

Die ladungskonjugierte Lösung ist

$$\begin{aligned} \psi^c &= C\left[\left(\psi^*\right)^T\gamma^0\right]^T = i\gamma^2\gamma^0\gamma^{0^T}\psi^* \\ &= \mathrm{e}^{-imt}\left(i\gamma^2\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-imt}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{2.188}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \psi : &\quad \text{negative Energie}\,, \quad S^z = -\frac{1}{2} . \\ \psi^c : &\quad \text{positive Energie}\,, \quad S^z = +\frac{1}{2} . \end{aligned} \tag{2.189}$$

Damit haben wir gesehen, dass zu einem Teilchen mit positiver Energie, Spinprojektion $S^z = \pm\frac{1}{2}$ und Ladung e das ladungskonjugierte Teilchen mit negativer Energie, Spinprojektion $S^z = \mp\frac{1}{2}$ und Ladung $-e$ gehört.

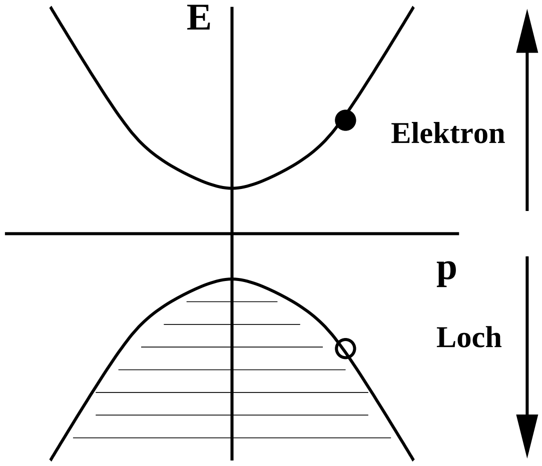

Abbildung 4: Elektron- und Lochzustände.

Dirac schlug im Jahr 1930 eine Interpretation der Lösungen der Dirac–Gleichung mit negativen Energien vor. Er nahm an, dass die Zustände mit negativen Energien im Grundzustand (d.h. in Abwesenheit von Anregungen $\longrightarrow$ das Vakuum) alle besetzt sind. Aufgrund des Pauli–Prinzips können Elektronen nicht in solche Zustände fallen und besetzen somit Zustände mit positiven Energien. Es ist aber möglich, Elektronen aus diesem sog. Dirac-See von Zuständen mit negativen zu solchen mit positiven Energien anzuregen. Dies läßt ein “Loch” im Dirac-See zurück. Die Ladung des Loches ist die Differenz zwischen der Gesamtladung des Systems mit dem fehlenden Elektron und der Gesamtladung ohne Loch. Damit besitzt das Loch die Ladung $-e$, falls e die Ladung des Elektrons ist. Weiterhin ist die Energie des Loches die entsprechende Differenz der Energien. Damit ist ein Loch im Sektor der negativen Energien ein Teilchen mit Ladung $-e$ und positiven Energien, das Positron, das 1932 experimentell beobachtet wurde. Dadurch können ladungskonjugierte Zustände als Teilchen und Antiteilchen betrachtet werden, wobei die Energie dementsprechend angesehen werden soll. Dies wird im Rahmen der zweiten Quantisierung in konsistenter Weise getan.

Eine solche Interpretation läßt Prozesse zu, die auch experimentell beobachtet werden, nämlich die Erzeugung bzw. Vernichtung von Elektron-Positron-Paaren, wobei Photonen vernichtet bzw. erzeugt werden. Dies bedeutet aber, daß die Dirac–Gleichung nicht mehr als eine Wellengleichung gedeutet werden kann. Wiederum erlaubt die zweite Quantisierung, eine Vielteilchen-Theorie aufzubauen, welche die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen in konsistenter Art und Weise einbaut.