Theoretische Physik: Fortgeschrittene Quantentheorie, Probeklausur

---

Prof. Dr. Alejandro Muramatsu WS 2011/12, 07. Februar 2012

Hinweise auf der Rückseite beachten! Bearbeitungszeit: **1,5h**.

1. **Hubbard-Modell ohne Wechselwirkung (4 Punkte)**

   Hier wird das Hubbard-Modell im Fall eines zweidimensionalen Gitters mit N_s Plätzen und periodischen Randbedingungen, ohne Wechselwirkung, betrachtet. Es handelt sich hierbei um ein quadratisches Gitter mit der Gitterkonstante a.

   Der Hamilton-Operator in zweiter Quantisierung lautet

   $$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} c^\dagger_{i,\sigma} c_{j,\sigma} \, ,$$

   wobei die Summe über alle Gitterplätze i, alle nächsten Nachbarn j, sowie die beiden Spin-Richtungen $\sigma = \uparrow, \downarrow$ ausgeführt wird. Die Hüpfamplitude t soll in diesem Fall für beide Raumrichtungen dieselbe sein.
   Diagonalisiere den Hamilton-Operator und berechne die Dispersionsrelation. Verwende hierzu eine diskrete Fourier-Transformation.

2. **Lösung der Dirac-Gleichung (4 Punkte)**

   Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung der Dirac-Gleichung

   $$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\, \psi = 0$$

   für ein freies massives Teilchen in dessen Ruhesystem eine ebene Welle der Form

   $$\psi(x) = e^{-ik_\mu x^\mu} w(k),$$

   ist, mit dem Spinor für positive Energien

   $$w^{(1)}(m, \mathbf{0}) = u^{(1)}(m, \mathbf{0}) = (1, 0, 0, 0)^T \qquad w^{(3)}(m, \mathbf{0}) = 0$$
   $$w^{(2)}(m, \mathbf{0}) = u^{(2)}(m, \mathbf{0}) = (0, 1, 0, 0)^T \qquad w^{(4)}(m, \mathbf{0}) = 0$$

   und dem Spinor für negative Energien

   $$w^{(1)}(-m, \mathbf{0}) = 0 \qquad w^{(3)}(-m, \mathbf{0}) = v^{(3)}(m, \mathbf{0}) = (0, 0, 1, 0)^T$$
   $$w^{(2)}(-m, \mathbf{0}) = 0 \qquad w^{(4)}(-m, \mathbf{0}) = v^{(4)}(m, \mathbf{0}) = (0, 0, 0, 1)^T$$

   a) Für die Transformation eines Spinor gilt $\psi'(x') = \Lambda(L)\psi(x)$ mit $\Lambda(L) = \exp\left(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}\right)$. Zeige, dass für einen Lorentz-Boost in x-Richtung

   $$\exp\left(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}\right) = \cosh\left(\frac{\zeta_1}{2}\right)\mathbb{1} - \sinh\left(\frac{\zeta_1}{2}\right)\gamma^0\gamma^1$$

   gilt.

   b) Die Lösungen für ein sich mit Impuls $\boldsymbol{k} = (k_x, 0, 0)$ bewegendes Teilchen hat die Form $\psi'(x') = e^{-ik'_\mu x'^\mu} w'(k')$. Gebe den Spinor $w'(k')$ an.

3. Zeitabhängige Störungstheorie (4 Punkte)

Man betrachte zwei Spins 1/2, $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$. Für Zeiten $t < 0$ hängt der Hamilton-Operator nicht von den Spins ab und kann als Null erachtet werden, wenn die Energieskala geschickt gewählt wird. Für $t > 0$ kann der Hamiltonian geschrieben werden als

$$H = \left(\frac{4\Delta}{\hbar^2}\right) \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2.$$

Wir nehmen an, dass sich das System für Zeiten $t \leq 0$ im Zustand $|m_1\, m_2\rangle = |+\,-\rangle$ befindet, also dem Eigenzustand der Operatoren S_1^z und S_2^z mit den Eigenwerten $+\hbar/2$ bzw. $-\hbar/2$.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit $t > 0$ einen der folgenden Zustände vorzufinden: $|+\,+\rangle$, $|+\,-\rangle$, $|-\,+\rangle$, $|-\,-\rangle$. Verwende zweitabhängige Störungstheorie bis zur ersten Ordnung. Betrachte dazu H als Störung, die zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet wird.

Die Summe aller Übergangs-Wahrscheinlichkeiten ergibt nicht 1 (die Wahrscheinlichkeit $P_{|+\,-\rangle \to |+\,-\rangle}(t)$ im Zustand $|+\,-\rangle$ zu bleiben ist bereits größer als 1). Erkläre kurz wieso und gib eine alternative Methode an, die Verweil-Wahrscheinlichkeit zu berechnen.

Hinweise:

- **Aufgabe 1:**
  - Diskrete Fourier-Transformation

$$c_{i,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{N_s}} \sum_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}_i}\, c_{\boldsymbol{k},\sigma}$$

- **Aufgabe 2:**

$$E = \gamma m c^2 \qquad \sigma_{\mu\nu} = i\gamma_\mu\gamma_\nu \qquad \cosh\zeta_1 = \gamma$$

$$\gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^1 = \mathbb{1} \qquad \eta^\mu_\nu = -\left(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{K}\right)^\mu_\nu \qquad \sinh\zeta_1 = \beta\gamma$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{x/2} \pm e^{-x/2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x \pm 1)}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Aufgabe 3:**
  - Spin-1/2 Operatoren $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  - Leiter-Operatoren

$$S_+ = S_x + iS_y, \qquad S_- = S_x - iS_y$$

  mit

$$S_+|-\rangle = \hbar|+\rangle \qquad S_-|-\rangle = 0$$

$$S_+|+\rangle = 0 \qquad S_-|+\rangle = \hbar|+\rangle$$