Theoretische Physik: Fortgeschrittene Vielteilchentheorie, Übung 1

Prof. Dr. Hans Peter Büchler WS 2012/13, 19. Oktober 2012

Informationen zur Vorlesung sowie eine elektronische Version der Übungen befinden sich auf der Homepage **http://www.theo3.physik.uni-stuttgart.de/lehre/ws12/fvt/**. Die Übungen sind in zwei verschiedene Aufgabentypen aufgeteilt: **Schriftlich** heisst, dass diese Aufgaben in der Übungsstunde abgegeben und von den Übungsassistenten korrigiert werden. Die Aufgaben markiert mit **Übungsstunde** sollen für die Übungsstunde vorbereitet und von einem Studenten vorgerechnet werden. Zum Erlangen des Scheines müssen 80% der Übungen sinnvoll bearbeitet und aktiv in der Übungsstunde vorgerechnet werden.

1. Harmonischer Oszillator (Schriftlich)
Betrachte den Hamiltonian für einen harmonischen Oscillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2. \tag{1}$$

(a) Schreibe die kanonischen Vertauschungsrelationen für den Ortsoperator x und den Impulsoperator p auf.

(b) Führe die Aufsteige- und Absteige-Operatoren $a^\dagger$ und a ein und berechne die Verstauschungsrelationen.

(c) Wie sieht der Hamiltonian ausgedrückt in $a^\dagger$ und a aus? Wie sehen die Eigenzustände und Eigenenergien aus?

(d) Wie sehen die Oberatoren $a^\dagger$, a, x und p im Heisenberg Bild aus?

(e) Eine Messung der Observablen $a^\dagger a$ liefert den Messwert 3. Welchen Wert liefert eine wiederholte Messung der Observablen $a^\dagger a$ zu einem späteren Zeitpunkt?

2. Potentialtopf (Schriftlich)
Gegeben sei ein eindimensionales Kastenpotential mit

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } |x| < a \\ 0 & \text{für } |x| > a \end{cases}, \text{ wobei } V_0 > 0\,. \tag{2}$$

Bestimme die Eigenwertbedingungen für die Energieeigenwerte der gebundenen Zustände eines Teilchens mit Masse m. Welche Bedingung muss an V_0 und a gestellt werden, um mindestens einen gebundenen Zustand zu erhalten?

Bitte wenden.

3. Kommutatoren (Übungsstunde)

a) Zeige die Identität $[AB, C] = A\,[B, C] + [A, C]\,B$.

b) Berechne $[x, p^2]$, $[x^2, p^2]$ und $[xp, p^2]$.

c) Seien $g(x)$, $f(p)$ analytische Funktionen der Operatoren x, p. Zeige, dass gilt $[p, g(x)] = -i\hbar\,\frac{d}{dx}\,g(x)$ und $[x, f(p)] = i\hbar\,\frac{d}{dp}\,f(p)$.

Berechne mit Hilfe der fundamentalen Vertauschungsrelationen zwischen Ort und Impuls die folgenden Kommutatoren

d) $[L_i, L_j]$, wobei i, $j = x$, y, z und $i \neq j$,

e) $\left[\mathbf{L}^2, L_i\right]$,

f) $[L_y, \mathbf{p}^2]$,

g) $[L_z, x]$.

4. Erwartungswerte des Drehimpulses (Übungsstunde)

Wir betrachten ein physikalisches System, welches sich im Eigenzustand $|l, m\rangle$ zu $\mathbf{L}^2$ und L_z befindet.

(a) Berechne den Erwartungswert $\langle L_x \rangle = \langle l, m|L_x|l, m\rangle$ und $\langle L_y \rangle$.

(b) Berechne die quadratischen Schwankungen ΔL_x und ΔL_y.

(Tipp: Es gilt $L_x = (1/\mathrm{i}\hbar)\,[L_y, L_z]$ und $L_y = (1/\mathrm{i}\hbar)\,[L_z, L_x]$. Beachte, dass L_z ein hermitescher Operator ist.)