Theoretische Physik: Fortgeschrittene Vielteilchentheorie, Übung 2

Prof. Dr. Hans Peter Büchler WS 2012/13, 23. Oktober 2012

1. Stark Effekt im harmonischen Oszillator (Schriftlich)

Der Hamilton Operator eines 1-dimensionalen harmonischen Oszillators im homogenen elektrischen Feld E lautet

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2) + eEQ. \tag{1}$$

Betrachte den 2. Term des Hamilton Operators als Störung des freien Oszillators, d.h. $H_1 := Q$, mit $\lambda := eE$.

(a) Berechne die Eigenfunktionen und Energie-Eigenwerte bis zur 3. Ordnung Störungstheorie.

(b) Vergleiche das störungstheoretische Resultat mit der exakten Lösung des Problems.

2. Kugeloszillator (Schriftlich)

(a) Zeige, dass der isotrope dreidimensionale harmonische Oszillator durch drei unabhängige eindimensionale Oszillatoren ausgedrückt werden kann. Gib die Eigenenergien und den jeweiligen Entartungsgrad an.

(b) Analog zum Wasserstoffproblem kann der Winkelanteil abesepariert werden. Gib dazu die Kommutatoren $\left[\mathbf{L}^2, H\right]$ und $[L_z, H]$ an und schreibe den Hamiltonian in Kugelkoordinaten wieder in Abhängigkeit der Eigenoperatoren zum Drehimpuls.

(c) Wähle als Ansatz für die Wellenfunktion

$$\psi(r) = \frac{x_l(r)}{r} Y_{lm}(\phi, \theta) \tag{2}$$

und leite eine Differentialgleichung für den Radialteil her.

(d) Zeige, dass aus dem asymptotischen Verhalten der Differentialgleichung für $r \to \infty$ und $r \to 0$ der Reihenansatz

$$x_l(r) = \exp\left(-r^2/2\right)\, r^{l+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \tag{3}$$

folgt. Gib eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_n an und bestimme wiederum die Eigenenergien und die jeweilige Entartung.
Tipp: Führe den neuen Radius ρ mit $\rho = \sqrt{m\omega/\hbar}\, r$ und anschließend die neue Energie $\varepsilon = 2E/\hbar\omega$ ein. Die Differentialgleichung kann dadurch geschickter dargestellt werden. Der Reihenansatz wird durch den neuen Radius zu

$$x_l(\rho) = \exp\left(-\rho^2/2\right)\, \rho^{l+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n. \tag{4}$$

3. Störung im 2-Niveau System (Übungsstunde)
Der ungestörte Hamilton Operator eines 2-Niveau Systems lautet in einer geeigneten Basis

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Betrachte nun den gestörten Hamilton Operator der Form

$$H(\lambda) := H_0 + \lambda \vec{e} \cdot \vec{\sigma}. \tag{7}$$

(mit σ_i Pauli Matrizen, $\vec{e}$ beliebiger Vektor)

(a) Berechne die Eigenfunktionen und Energie-Eigenwerte bis zur zweiten Ordnung, falls die Energieniveaus nicht entartet sind ($E_1 \neq E_2$).

(b) Bestimme für den Fall entarteter Energieniveaus ($E_1 = E_2$) diejenige Linearkombination der ungestörten Eigenvektoren, welche die Störung diagonalisiert. Wie lautet die Korrektur 1. Ordnung des Energie-Eigenwertes?

(c) Löse die Schrödingergleichung

$$H(\lambda)\Psi(\lambda) = E(\lambda)\Psi(\lambda) \tag{8}$$

exakt und vergleiche die Ergebnisse mit (a) und (b).

4. Landau-Levels (Übungsstunde)
Betrachte den zweidimensionalen Hamiltonian

$$H_\perp = \frac{1}{2m}\left(p_1 - \frac{e}{c}A_1\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_2 - \frac{e}{c}A_2\right)^2 \tag{9}$$

mit $\mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$.

(a) Zeige, dass die kinetischen Impulse $\pi_i = p_i - e/cA_i$ nicht miteinander kommutieren.

(b) Definiere

$$\Pi_i = \sqrt{\frac{c}{eB}}\pi_i \tag{10}$$

und zeige die Kommutatorrelationen $[\Pi_1, \Pi_2] = i\hbar$ und $[\Pi_1, \Pi_1] = [\Pi_2, \Pi_2] = 0$.

(c) Stelle die Verbindung zum Harmonischen Oszillator her.

(d) Definiere

$$a = \frac{\Pi_1 + i\Pi_2}{\sqrt{2\hbar}} \tag{11}$$

und zeige, dass $[a, a^\dagger] = 1$ gilt.

(e) Bringe $H_\perp$ auf die Form

$$H_\perp = \hbar\omega_c\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \tag{12}$$

(f) Wie sieht das Spektrum von $H_\perp$ aus? Wie ist die Entartung des Systems?