

Theoretische Physik: Fortgeschrittene Vielteilchentheorie, Übung 4

Prof. Dr. Hans Peter Büchler WS 2012/13, 6. November 2012

1. Spin-Bahn-Kopplung und Clebsch-Gordon-Koeffizienten (Schriftlich)

Aus der relativistischen Beschreibung des Wasserstoff-Problems mithilfe der Dirac-Gleichung kann man Korrekturen zum nicht-relativistischen Hamilton-Operator H_0 ableiten. Eine wichtige Korrektur ist die sogenannte **LS**- oder Spin-Bahn-Kopplung, die in einem einfachen Bild verstanden werden kann als Wechselwirkung des Elektronenspins \mathbf{S} mit dem von der Bahnbewegung des Elektrons erzeugten Magnetfelds $\mathbf{B} \sim \mathbf{L}$. Die korrekte relativistische Rechnung liefert folgenden Beitrag zum Wasserstoff Hamilton-Operator:

$$H_{\text{SB}} = f(r) \mathbf{L} \mathbf{S} = \sum_i f(r) L_i \otimes S_i$$

wobei $f(r) = e^2/(2m_e^2 c^2 r^3 4\pi\epsilon_0)$. Der neue Hamiltonoperator lautet also $H = H_0 + H_{\text{SB}}$, wobei wir später H_{SB} als Störung ansehen wollen.

- Führe den Gesamtdrehimpuls $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} = \mathbf{L} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbf{S}$ ein und zeige, dass \mathbf{J}^2 sowohl mit H_0 als auch mit H_{SB} vertauscht.
- Berechne für den Unterraum mit $l = 1$ die (gemeinsamen) Eigenzustände $|j, m\rangle$ zu \mathbf{J}^2 und J_z , als Linearkombination der Zustände $|m_l, m_s\rangle \equiv |l = 1, m_l\rangle \otimes |s = 1/2, m_s\rangle$:

$$|j, m\rangle = \sum_{m_l, m_s} c(m_l, m_s, j, m) |l = 1, m_l\rangle$$

Die Faktoren $c(m_l, m_s, j, m)$ heissen Clebsch-Gordon-Koeffizienten.

Tipp: Bestimme zunächst den Eigenzustand zu $j = l + s = 3/2$ und $m = 3/2$. Anschließend können die weiteren $j = 3/2$ Zustände durch Anwendung des Leiter-Operators $J^- = J_x - iJ_y$ mit der Wirkung

$$J^- |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle$$

erzeugt werden. Durch Ausnutzung von Orthogonalität und Normierung der neuen Basis-Zustände können danach die noch fehlenden $j = 1/2$ Zustände gefunden werden.

- Berechne die Energie-Aufspaltung des $2p$ -Niveaus des Wasserstoffatoms mit Hauptquantenzahl $n = 2$ und Drehimpuls $l = 1$ durch die Spin-Bahn-Kopplung mithilfe der Störungstheorie in erster Ordnung. Zeige, dass die Energieaufspaltung von der Größenordnung $\alpha^2 E_0$ ist, wobei $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0 \hbar c) \approx 1/137$ die Feinstrukturkonstante und E_0 die Energie ohne Spin-Bahn-Kopplung ist.

Hinweis: Für den Ortsanteil gilt $\langle \Psi_{2,1,m} | 1/r^3 | \Psi_{2,1,m} \rangle = 1/(24a_0^3)$, wobei $\Psi_{2,1,m}$ die Eigenfunktionen zu H_0 (ohne Spin-Freiheitsgrad) mit $n = 2, l = 1$ sind. Der Bohrsche Radius ist $a_0 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / (m_e e^2)$.

2. Wechselwirkende Spin-1/2 Systeme (Übungsstunde)

- (a) Wir betrachten zunächst ein System aus drei Spin-1/2. Gebe die Dimension des Hilbertraums an.

Die Spin-Operatoren $\mathbf{S}^{(i)}$ bzw. $S_z^{(i)}$ seien wie üblich definiert und wirken nur auf den i . Spin. Wir definieren weiterhin den Gesamtspin und dessen z -Komponente durch

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{S}^{(i)}, \quad S_z = \sum_{i=1}^3 S_z^{(i)}.$$

Gebe die Eigenzustände und zugehörigen Eigenwerte der Operatoren $S^2 = \mathbf{S}^2$ und S_z an.

- (b) Betrachte nun den Hamiltonoperator

$$H = J \sum_{i=1}^3 \mathbf{S}^{(i)} \cdot \mathbf{S}^{(i+1)}, \quad J > 0.$$

wobei wir periodische Randbedingungen annehmen ($i + 1 = 1$ für $i = 3$).
Berechne die Eigenzustände und zugehörige Eigenenergien.

Tipp: Schreibe H als Funktion von S^2 und S_i^2