

Theoretische Physik: Fortgeschrittene Vielteilchentheorie, Übung 6

Prof. Dr. Hans Peter Büchler WS 2012/13, 20. November 2012


1. Identische Fermionen im Potentialtopf (Schriftlich)

Wir betrachten zwei identische Spin-1/2 Fermionen im eindimensionalen Potential mit $V(x) = 0$ für $|x| \leq 1$ und $V(x) = \infty$ sonst. Der dimensionslose Ein-Teilchen Hamilton-Operator für das i . Teilchen lautet

$$H^{(i)} = -\frac{1}{2}\partial_{x_i^2} + V(x_i)$$

- Gebe an, wieso Orts- und Spin-Anteil getrennt behandelt werden können, die Zustände also als einfaches Produkt beider Anteile geschrieben werden können. Gib die beiden niedrigsten Ein-Teilchen-Wellenfunktionen für den Ortsanteil an.
- Gebe den Grundzustand für ein System aus zwei Fermionen mit $H = \sum_i H^{(i)}$ an, für den Fall dass
 - der Spin-Zustand antisymmetrisch unter Vertauschung beider Fermionen ist. Das entspricht dem Singlet-Zustand $(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$
 - der Spin-Zustand symmetrisch unter Vertauschung ist. Das entspricht einem der Triplet-Zustände $|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ oder $(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$.
- Untersuche den Einfluss einer Kontakt-Wechselwirkung, die durch das Wechselwirkungs-Potential $\lambda\delta(x_1 - x_2)$ beschrieben wird, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$. Berechne hierzu die Energiekorrektur in erster Ordnung Störungstheorie ($\lambda \ll 1$) für Singlet- und Triplet-Zustände. Gib einen Grund dafür an, warum das Ergebnis für die Triplet-Zustände exakt ist.

2. Elektrische Dipol-Übergänge in Polaren Molekülen (Übungsstunde)

Heteronukleare Moleküle  besitzen aufgrund ihrer asymmetrischen Struktur ein elektrisches Dipolmoment \mathbf{d} entlang ihrer Symmetrieachse. Wir betrachten in dieser Aufgabe nur den Rotationsfreiheitsgrad eines solchen Moleküls, der durch den Drehimpuls \mathbf{J} beschrieben wird. Die Dynamik eines solchen „starrten Rotators“ wird durch $H_{\text{rot}} = B \cdot \mathbf{J}^2/\hbar^2$ beschrieben (warum?). Die Zustände $|J, M\rangle$ sind also die Eigenzustände zu H_{rot} mit Energie $BJ(J+1)$ und Entartungsgrad $2J+1$. Die Größenordnung der Rotationskonstanten B/\hbar liegt üblicherweise im GHz Bereich. Es ist also möglich, mit Mikrowellen Übergänge zwischen verschiedenen $|J, M\rangle$ Zuständen zu treiben. Wir berechnen in dieser Aufgabe die Matrixelemente der möglichen Übergänge. Elektrische Dipol-Übergänge sind nur dann möglich, wenn das Matrix-Element $\langle J', M' | \mathbf{d} | J, M \rangle$ von Null verschieden ist.

- Wir beschreiben zunächst den Dipoloperator \mathbf{d} in einer sphärischen Basis mit Komponenten d_q , wobei $q = 0, \pm 1$. Die Komponenten sind durch $d_0 = d \cos(\theta)$

und $d_{\pm} = \mp d e^{\pm i\phi} \sin(\theta)/\sqrt{2}$ gegeben und sind proportional zu Kugelflächenfunktionen: $d_q \propto Y_1^q$.

Wende das Wigner-Eckart Theorem auf die Dipol-Matrixelemente in der sphärischen Darstellung $\langle J', M' | d_q | J, M \rangle$ an. Welchen Rang besitzt der Tensor d_q ? Welche Auswahlregeln für $\Delta J \equiv J' - J$ und $\Delta M \equiv M' - M$ ergeben sich zunächst direkt aus den Clebsch-Gordan Koeffizienten?

- b) Zeige mithilfe eines Paritäts-Arguments warum Übergänge mit $\Delta J = 0$ nicht möglich sind. Verwende hierzu das ursprüngliche Matrixelement und beachte die Parität der einzelnen Kugelflächenfunktionen.
- c) Die übrig gebliebenen Auswahlregeln sind $\Delta J = \pm 1$ mit $\Delta M = q = 0, \pm 1$. Wir wollen das Dipol-Matrixelement weiter vereinfachen. Das Wigner-Eckart Theorem erlaubt uns sowohl q als auch M und M' frei zu wählen um den Term $\langle J' || d || J \rangle$ zu bestimmen. Stelle dazu die Gleichung nach diesem Term um und wähle $M = J$ und $q = 1$ um $\langle J + 1 || d || J \rangle$ explizit zu berechnen. Wie können hieraus direkt die Elemente für $\Delta J = -1$ bestimmt werden (Idee genügt)?

Hinweise: Der auftretende Clebsch-Gordan Koeffizient entspricht der Kopplung zweier „stretched states“ (Zustände mit $M = J$) zu einem neuen stretched state. Überlege, was in diesem Fall allgemein für den Koeffizient gilt.

Die Kugelflächenfunktion für solche Zustände sind gegeben durch

$$Y_J^J(\theta, \phi) = \frac{(-1)^J}{2^J J!} \sqrt{\frac{(2J+1)!}{4\pi}} \sin^J(\theta) e^{iJ\phi}$$

Weiterhin gilt für ungerade n :

$$\int_0^\pi d\theta \sin(\theta)^n = \frac{(\frac{n-1}{2})!(\frac{n+1}{2})!}{(n+1)!} 2^{n+1}$$

Das Endergebnis für $\Delta J = +1$ lautet

$$\langle J+1, M+q | d_q | J, M \rangle = d \sqrt{\frac{J+1}{2J+3}} \langle J, M; 1, q | J+1, M+q \rangle$$

- d) Als einfache Anwendung betrachten wir ein polares Molekül im Grundzustand $|0, 0\rangle$. Berechne zunächst das Dipolmoment $\langle 00 | \mathbf{d} | 00 \rangle$. Durch ein externes (in diesem Fall statisches) elektrisches Feld $\mathbf{E} = E \mathbf{e}_z$ kann ein Dipolmoment induziert werden. Um eine Abschätzung dafür zu erhalten, betrachten wir die Wirkung des elektrischen Feldes $H_E = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} = -d_0 E$ als Störung (das heisst $dE/B \ll 1$). Berechne das induzierte Dipolmoment (Komponente in z-Richtung) $\langle \widehat{00} | d_0 | \widehat{00} \rangle$ mithilfe obiger Matrixelemente. Hierbei beschreibt $|\widehat{00}\rangle$ den Grundzustand in 1. Ordnung Störungstheorie.

Hinweis: Der einzige auftretende Clebsch-Gordan Koeffizient ist in diesem Fall wieder trivial. Überlege, was generell passiert wenn einer der beiden Drehimpulse bei der Kopplung 0 ist.