Theoretische Physik: Fortgeschrittene Vielteilchentheorie, Übung 7

Prof. Dr. Hans Peter Büchler WS 2012/13, 27. November 2012

1. **Ideales Fermigas (Übungsstunde)**

   Betrachte ein ideales nicht-wechselwirkendes N-Teilchen Fermigas in einem eindimensionalen Kasten der Länge L mit periodischen Randbedingungen. Verwende dazu den Formalismus der ersten Quantisierung. Die Einteilchenlösungen haben die Form $\varphi_{k,\sigma}(r,\, s) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp(ikr)\; \chi_\sigma(s)$. Hier beschreibt k den Wellenvektor, r die Ortskoordinate, χ die Spinfunktion, σ den Spin und s den Eigenwert des Spins. Dabei gilt zusätzlich $\varphi_{k,\sigma}(r\, +\, L\hat{e}_x) = \varphi_{k,\sigma}(r)$.

   a) Gebe die allgemeine Grundzustandswellenfunktion des N-Teilchen Problems an. Berechne nun explizit die Wellenfunktionen des Grunzustandes für $N = 2$?

   b) Berechne die Dispersionsrelation $\varepsilon(k)$ und daraus die Gesamtenergie. Wie lautet die Fermienergie?

   c) Betrachte nun $L \to \infty$. Berechne die Zustandsdichte $\rho(E)$ des Problems mittels

   $$\rho\,(E) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, \delta\left(E - \varepsilon(k)\right)\, . \tag{1}$$

   d) Berechne die Energiedichte mit Hilfe der Zustandsdichte.

2. **Eigenschaften bosonischer Operatoren (Schriftlich)**

   Beim harmonischen Oszillator kann man Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren einführen, welche folgende Kommutationsbeziehungen erfüllen

   $$\left[b\, ,\, b^\dagger\right] = 1 \tag{2}$$

   Damit kann man den Besetzungszahloperator $\hat{n} = b^\dagger b$ bilden. Seien die Zustände $|n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$ normierte Eigenzustände vom Besetzungszahloperator.

   a) Zeige mit Hilfe der Kommutationsbeziehung (2), dass $b|n\rangle$ und $b^\dagger|n\rangle$ Eigenzustände von $\hat{n}$ sind. Gebe die Eigenwerte an.

   b) Zeige, dass folgendes gilt

   $$\begin{aligned} b|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle\, , \\ b^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\, . \end{aligned}$$

   c) Zeige, dass für $n = 0$

   $$b|0\rangle = 0$$

   gilt.

d) Beweise folgende Beziehungen für Besetzungszahlzustände im bosonischen Fockraum, wobei die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren die folgenden Kommutationsbeziehungen erfüllen

$$\left[b_i\,,\,b_j^\dagger\right] = \delta_{ij}\ ,\ \left[b_i\,,\,b_j\right] = \left[b_i^\dagger\,,\,b_j^\dagger\right] = 0\,;$$

- $b_i|n_1,...,n_i,...\rangle = \sqrt{n_i}\,|n_1,...,n_i-1,...\rangle$,
- $b_i^\dagger|n_1,...,n_i,...\rangle = \sqrt{n_i+1}\,|n_1,...,n_i+1,...\rangle$.

3. Eigenschaften fermionischer Operatoren (Übungsstunde)

Um die Eigenschaften fermionischer Operatoren zu vertiefen, betrachten wie den BCS-Zustand (BCS: Bardeen Cooper Schriefer) in der Form

$$|\Omega\rangle = \prod_{k>0}\left(u_k + v_k\, c_{k,\uparrow}^\dagger\, c_{-k,\downarrow}^\dagger\right)\,|0\rangle, \tag{3}$$

hierbei sind u_k und v_k Normierungsparameter, die durch $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$ festgelegt sind. Die fermionischen Operatoren $c_{\pm k,\sigma}^\dagger$ erzeugen Fermionen mit $\pm k$ und Spin σ aus dem Vakuum $|0\rangle$.

a) Zeige, dass der BCS-Zustand normiert ist.

b) Berechne die Erwartungswerte zum BCS-Zustand

   i. $\langle\Omega|c_{k,\uparrow}^\dagger\, c_{-k,\downarrow}^\dagger|\Omega\rangle$

   ii. $\langle\Omega|c_{k,\sigma}^\dagger\, c_{k,\sigma}|\Omega\rangle$

c) Es werden nun die BCS-Operatoren $\alpha_{k,\uparrow,\downarrow}$ und $\alpha_{k,\uparrow,\downarrow}^\dagger$ eingeführt mit

$$\alpha_{k,\uparrow} \;=\; u_k\, c_{k,\uparrow} - v_k\, c_{-k,\downarrow}^\dagger\,, \qquad \alpha_{k,\uparrow}^\dagger = u_k^*\, c_{k,\uparrow}^\dagger - v_k^*\, c_{-k,\downarrow}\,, \tag{4}$$

$$\alpha_{k,\downarrow} \;=\; u_k\, c_{-k,\downarrow} + v_k\, c_{k,\uparrow}^\dagger\,, \qquad \alpha_{k,\downarrow}^\dagger = u_k^*\, c_{-k,\downarrow}^\dagger + v_k^*\, c_{k,\uparrow}\,. \tag{5}$$

Zeige explizit, dass die BCS-Operatoren den fermionischen Vertauschungsrelationen gehorchen, berechne also $\{\alpha_{k,\uparrow,\downarrow}\,,\,\alpha_{k,\uparrow,\downarrow}^\dagger\}$. Berechne anschließend $\alpha_{k,\uparrow,\downarrow}|\Omega\rangle = 0$. Welche Konsequenz hat dies für $|\Omega\rangle$?

d) Wie müssen u_k und v_k gewählt werden, um den Grundzustand freier Fermionen zu beschreiben? Gebe den Grundzustand freier Fermionen an.

e) Der Hamiltonian freier Fermionen lautet

$$\mathrm{H} = \sum_k \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \varepsilon_F\right)\,\left(c_{k,\uparrow}^\dagger\, c_{k,\uparrow} + c_{-k,\downarrow}^\dagger\, c_{-k,\downarrow}\right)\,, \tag{6}$$

wobei ε_F die Fermieenergie ist. Drücke den Hamiltonian durch die, in Aufgabenteil c) eingeführten, BCS-Operatoren aus. Berechne nun den Erwartungswert des Hamiltonians $\langle\Omega|\mathrm{H}|\Omega\rangle$. Was beschreibt $\alpha_{k,\sigma}^\dagger$ für $k > k_F$? Was liegt bei der Anwendung von $\alpha_{k,\sigma}^\dagger$ vor, bei $k < k_F$?