Theoretische Physik: Fortgeschrittene Vielteilchentheorie, Übung 9

Prof. Dr. Hans Peter Büchler WS 2012/13, 11. Dezember 2012

1. Eigenschaften des statistischen Operators (Übungsstunde)

Ein gemischter Zustand (statistische Verteilung von reinen Zuständen) wird quantenmechanisch über die Dichtematrix bzw. den statistischen Operator $\hat{\rho}$ beschrieben. Wir gehen in dieser Aufgabe von der Form

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|$$

aus, wobei für die Wahrscheinlichkeiten $p_i > 0$ gilt, dass $\sum_i p_i = 1$. Wir nehmen weiterhin an, dass die Zustände $\{|i\rangle\}$ eine Orthonormalbasis bilden (Überlege, welche Änderungen sich ergeben, falls die Zustände $|i\rangle$ nicht orthogonal zueinander sind). Beweise folgende Eigenschaften:

(i) $\hat{\rho}$ ist hermitesch

(ii) $\hat{\rho}$ ist positiv semidefinit

(iii) $\mathrm{tr}(\hat{\rho}) = 1$

(iv) Der Erwartungswert eines Operators $\hat{\mathrm{A}}$ ist $\langle \hat{\mathrm{A}} \rangle = \mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{\mathrm{A}})$

Ein reiner Zustand kann beschrieben werden durch $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$. Zeige, dass die folgenden drei Bedingungen äquivalent sind:

(1) $\hat{\rho}$ beschreibt einen reinen Zustand

(2) $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ (d.h. $\hat{\rho}$ ist ein Projektionsoperator)

(3) $\mathrm{tr}(\hat{\rho}^2) = 1$

Falls die Zustände $|i\rangle$ Eigenzustände eines Hamiltonoperators $\hat{\mathrm{H}}$ mit der Energie E_i sind, können die Verteilungswahrscheinlichkeiten im kanonischen Ensemble als

$$p_i = \frac{1}{Z} \exp\left(-\beta E_i\right)$$

geschrieben werden, wobei Z die Zustandssumme ist und $\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$. Zeige, dass der statistische Operator dann als

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \exp\left(-\beta \hat{\mathrm{H}}\right)$$

geschrieben werden kann. Bestimme $Z = Z(\beta)$.

2. Kommutator des elektrischen Feldes (Übungsstunde)

In dieser Aufgabe soll der Kommutator $[\hat{E}_i(\mathbf{x},t), \hat{E}_j(\mathbf{x}',t')]$ des elektrischen Feldes berechnet werden.

a) Wir berechnen zu diesem Zweck zunächst den Kommutator $[\hat{A}_i(\mathbf{x},t), \hat{A}_j(\mathbf{x}',t')]$. Beginne mit der Modenzerlegung des Vektorpotentials

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \left(\frac{hc^2}{V\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}\, \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k},\lambda)\, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} + \text{h.c.}\right) \tag{1}$$

und verwende die Vollständigkeits-Relation

$$\sum_{\lambda} \epsilon_i(\mathbf{k},\lambda)\, \epsilon_j^\star(\mathbf{k},\lambda) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \tag{2}$$

der Polarisations-Vektoren, um den Kommutator auf folgende Form zu bringen:

$$[\hat{A}_i(\mathbf{x},t), \hat{A}_j(\mathbf{x}',t')] = \partial_{ij} K(\boldsymbol{\xi},\tau), \tag{3}$$

wobei $\boldsymbol{\xi} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ und $\tau \equiv t - t'$ ist. Der Ableitungs-Operator ∂_{ij} ist dabei definiert als

$$\partial_{ij} \equiv \frac{\partial_\tau^2}{c^2}\delta_{ij} - \partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}.$$

b) Schreibe den Kommutator des **E**-Felds in der folgenden Form:

$$[\hat{E}_i(\mathbf{x},t), \hat{E}_j(\mathbf{x}',t')] = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial_\tau^2}[\hat{A}_i(\mathbf{x},t), \hat{A}_j(\mathbf{x}',t')]. \tag{4}$$

c) Bringe jetzt den Kommutator auf eine Form, die proportional zu $\delta(\xi^2 - c^2\tau^2)$ ist. Welches physikalische Konzept steckt hinter diesem Ergebnis?

Hinweis: Der Ableitungsoperator ∂_{ij} muss nicht ausgewertet werden. Es genügt, die **k**-Integration durchzuführen, indem die Summe $\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \to \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}$ durch ein Integral ersetzt wird.

Bonus: Was passiert, wenn man den Photonen eine fermionische Statistik gibt? Fordere zu diesem Zweck Anti-Kommutatorrelationen $\{\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}',\lambda'}\} = \delta_{\lambda,\lambda'}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ für die Operatoren und berechne dann für das elektrische Feld $\{\hat{E}_i(\mathbf{x},t), \hat{E}_j(\mathbf{x}',t')\}$.

3. Kohärente Zustände (Schriftlich)

Ein kohärenter (oder Glauber-) Zustand α ist definiert als rechter Eigenzustand des Vernichtungsoperators

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{C}$.

a) Bestimme die Koeffizienten $c_n(\alpha)$ der Entwicklung $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha)|n\rangle$ für den normierten kohärenten Zustand $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$, wobei $|n\rangle$ die Eigenzustände des Besetzungsoperators $\hat{n}$ sind.

b) Welchen Operator $\hat{C}(\alpha)$ muss man auf den Grundzustand $|0\rangle$ anwenden, um den kohärenten Zustand $|\alpha\rangle = \hat{C}(\alpha)|0\rangle$ zu erzeugen?

c) Berechne die mittlere Teilchenzahl $\langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle$ und die quadratische Abweichung $(\Delta\hat{n})^2$. Welcher Wahrscheinlichkeits-Verteilung entspricht dies?

d) Ein eindimensionaler Oszillator mit $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{n} + \frac{1}{2})$ befinde sich anfangs im Zustand $|\psi(t = 0)\rangle = |\alpha\rangle$. Zeige, dass sich die Zeitentwicklung (bis auf eine Phase) in der Form $|\psi(t)\rangle \sim |\alpha(t)\rangle$ schreiben lässt.

e) Berechne $\langle\alpha|\alpha'\rangle$ sowie $\int \mathrm{d}^2\,\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|$. Verwende Polarkoordinaten für die Integration in der komplexen Ebene. Wie ist das Ergebnis zu interpretieren?