Theoretische Physik: Fortgeschrittene Vielteilchentheorie, Übung 10

Prof. Dr. Hans Peter Büchler WS 2012/13, 18. Dezember 2012

1. Squeezed States und Parametric Amplifier (Übungsstunde)

In Übung 9 haben wir kohärente Zustände untersucht. Die Besonderheit der kohärenten Zustände war, dass sie eine minimale Unschärfe besitzen. Im folgenden wollen wir eine weitere Klasse von Zuständen mit minimaler Unschärfe untersuchen, die squeezed states. Squeezed states sind eine weitere Form von nicht-klassischem Licht. Die Besonderheit von ihnen ist, dass die Unschärfe einer Variable kleiner ist, wie die für einen kohärenten Zustand. Um die Unschärferelation zu erfüllen muss dann die Unschärfe in der konjugierten Variable grösser sein, als in einem kohärenten Zustand.

Für den harmonischen Oszillator mit Frequenz ω gilt für alle kohärenten Zustände

$$\langle \Delta Q^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\omega} \quad \text{und} \quad \langle \Delta P^2 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \tag{1}$$

und damit für die squeezed state entweder

$$\langle \Delta Q^2 \rangle \leq \frac{\hbar}{2\omega} \quad \text{oder} \quad \langle \Delta P^2 \rangle \leq \frac{\hbar\omega}{2}\,. \tag{2}$$

Im folgenden wollen wir die Operatoren des quantisierten Strahlungsfeldes nur für eine Mode $\vec{k}, \lambda$ betrachten, wodurch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren nach $a_{\vec{k},\lambda} \to a$ und $a^\dagger_{\vec{k},\lambda} \to a^\dagger$ übergehen. Wir definieren nun den Squeeze-Operator $S(\epsilon)$ mit

$$S(\epsilon) = \exp\left(\frac{\epsilon^*}{2}\, a^2 - \frac{\epsilon}{2}\left(a^\dagger\right)^2\right)\,. \tag{3}$$

a) Zeige explizit, dass Gleichungen (1) durch kohärente Zustände $|\alpha\rangle$ erfüllt werden. Dabei erzeugt der Operator $C(\alpha)$ einen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$, wie in Übung 9 Aufgabe 3 bestätigt, also $|\alpha\rangle = C(\alpha)\,|0\rangle$.

b) Berechne folgende Relationen für $S(\epsilon)$ mit $\epsilon = r\,\exp(i\phi)$, wobei r einen Radius angibt und ϕ eine Phase,

$$\begin{aligned} S^\dagger(\epsilon) &= S^{-1}(\epsilon) = S(-\epsilon)\,, & (4)\\ S^\dagger(\epsilon)\; a\, S(\epsilon) &= a\,\cosh(r) - a^\dagger\, e^{i\phi}\,\sinh(r)\,, & (5)\\ S^\dagger(\epsilon)\; a^\dagger\, S(\epsilon) &= a^\dagger\,\cosh(r) - a\, e^{-i\phi}\,\sinh(r)\,. & (6) \end{aligned}$$

c) Verifiziere, dass die Zustände $|\alpha\,,\,\epsilon\rangle = C(\alpha)\; S(\epsilon)\; |0\rangle$ squeezed sind.

Einer der einfachsten Prozesse in der nichtlinearen Optik ist derjenige, bei dem sich ein Photon der Frequenz 2ω in zwei Photonen der Frequenz ω umwandelt. Dieser Prozess tritt auf in Kristallen mit einer nicht verschwindenden nichtlinearen Suszeptibilität zweiter Ordnung χ. Dies wird zum Bau eines parametrischen Verstärkers (parametric amplifier) ausgenutzt: Ein Signal der Frequenz ω wird verstärkt durch Pumpen eines Kristalls (mit $\chi \neq 0$) mit Frequenz 2ω. Wir betrachten hier ein einfaches Modell eines parametrischen Verstärkers, bei dem die gepumpte Mode der Frequenz 2ω klassisch und die zu verstärkende Mode der Frequenz ω durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger$ und a beschrieben werden. Der Hamiltonian lautet dann

$$\mathrm{H} = \hbar\omega\, a^\dagger a - i\hbar\,\frac{\chi}{2}\left(a^2\, e^{2i\omega t} - \left(a^\dagger\right)^2 e^{-2i\omega t}\right) = \mathrm{H}_0 - \mathrm{H}_1(t)\ . \tag{7}$$

Gehe nun zum Wechselwirkungsbild über. Im Wechselwirkungsbild ist die Zeitentwicklung der Operatoren durch den zeitunabhängigen Teil H_0 gegeben, der Rest der Dynamik wird auf die Zustände abgewälzt. Diese propagieren also mit $U_{\mathrm{WW}}(t) = U_0^{-1}(t)\ U(t)$, wobei $U_0(t)$ der Propagator des zeitunabhängigen Teils ist und $U(t)$ die volle Dynamik beschreibt.

d) Zeige explizit, dass das durch parametrische Verstärkung erzeugte Licht einem squeezed state entspricht.

2. Absorption und Emission von Photonen nach Einstein (Schriftlich)

Im folgenden betrachten wir ein Zwei-Niveau System. Dabei beschreiben wir das untere Niveau $|1\rangle$ mit der Energie E_1 und das obere Niveau $|2\rangle$ mit der Energie E_2. Die Energiedifferenz der beiden Zustände ist $\hbar\omega = \mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1$. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass ein Atom ein Photon absorbiert oder emittiert, sobald ein Elektron den Zustand wechselt.

a) Zuerst betrachten wir den Fall der spontanen Emission. Dazu betrachten wir Atome, die sich im angeregten Zustand $|2\rangle$ befindet. Die Anzahl der angeregten Atome bezeichnen wir mit N_2. Gebe die Ratengleichung für den Übergang $|2\rangle \to |1\rangle$ an. Führe dazu den Einstein Koeffizienten A_{21} ein. Löse anschließend die Ratengleichung. Wie kann man die Lösung interpretieren?

b) Nun analysieren wir die stimulierten Prozesse in dem Zwei-Niveau System. Dazu müssen wir die spektrale Energiedichte $u(\omega)$ einführen. Gebe zuerst die Ratengleichung der Absorption eines Photons an, also für den Prozess $|1\rangle \to |2\rangle$. Führe hierzu den Einstein Koeffizienten B_{12} ein. Die Ratengleichung ist dann proportional zu B_{12} und $u(\omega)$. Im Gegensatz zu den intuitiven Prozessen der Absorption und der zuvor besprochenen spontanen Emission, realisierte Einstein, dass es noch einen weiteren Prozess gibt, jenen der stimulierten Emission. Dieser ist für die Funktionsweise des LASERs wichtig. Gebe die Ratengleichung für diesen Prozess an, hier wird der letzte Einstein Koeffizient mit B_{21} eingeführt. Was ist die Besonderheit der stimulierten Emission?

c) Gebe nun die totale Ratengleichung an und bestimme daraus die einzelnen Einstein Koeffizienten. Nehme für das Verhältnis N_2/N_1 eine Boltzmann Verteilung an. Aus welchem Grund kann diese Annahme getroffen werden? Die spektrale Energiedichte folgt dabei der Planckschen Strahlungsformel.