Theoretische Physik: Fortgeschrittene Vielteilchentheorie, Übung 11

Prof. Dr. Hans Peter Büchler WS 2012/13, 08. Januar 2013

1. **Wasserstoffatom in der Klein-Gordon Theorie (Schriftlich)**

Die nicht-relativistische Schrödinger Gleichung für das Wasserstoff Atom kann auf die Form gebracht werden

$$\left\{-\left[\partial_r^2+\frac{2}{r}\partial_r\right]+\frac{l(l+1)}{r^2}-\frac{2mcZ\alpha}{\hbar r}-E\frac{2m}{\hbar^2}\right\}\psi_l(r)=0 \tag{1}$$

mit $\alpha = e^2/\hbar c$. Die Klein-Gordon Gleichung für stationäre Lösungen hat dagegen die Form an

$$\left[c^2\hbar^2\Delta+\left(E+\frac{Ze^2}{r}\right)^2-m^2c^4\right]\psi=0 \tag{2}$$

Zeige, dass sich Gleichung (1) auf die obige Gleichung (2) umschreiben lässt mit der Substitution

$$\begin{aligned} l(l+1) &\to l(l+1)-Z^2\alpha^2=\lambda(\lambda+1) && (3)\\ E &\to \frac{(E^2-m^2c^4)}{2mc^2} && (4)\\ \alpha &\to \alpha\frac{E}{mc^2} && (5)\end{aligned}$$

und wir definieren

$$\lambda = l-\delta_l \qquad \delta_l = l+1/2-\sqrt{(l+1/2)^2-Z^2\alpha^2} \tag{6}$$

Daher können wir die Eigenwerte des Klein-Gordon Problems in Analogie zu den Lösungen des Wasserstoff Atoms im nicht relativistischen Fall finden. Zeige, dass die Eigenwerte die Form annehmen

$$E_{n,l}=mc^2\left[1+\left(\frac{Z\alpha}{n-\delta_l}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{7}$$

Vergleiche die relativistischen Korrekturen mit der bekannten Feinstruktur Aufspaltung. Wieso können wir schliessen, dass die Klein-Gordon Gleichung keine gute Beschreibung des Wasserstoff Atoms liefert?

2. **Symmetrien der Schrödinger Gleichung (Übungsstunde)**

a) Zuerst beleuchten wir die Invarianz der freien Schrödinger Gleichung für ein Teilchen bei einer Galilei Transformation. Wir betrachten zwei Bezugssysteme, zum Einen F mit den Koordinaten $\mathbf{x}$ und Zeit t und zum Anderen F' mit $\mathbf{x}'$

und t'. Dabei bewegt sich F' mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ relativ zu F, sodass

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{v}\,t'\ ,\ t = t'\,, \tag{8}$$

gilt. In F' lautet die Schrödinger Gleichung

$$i\hbar\,\partial_{t'}\,\Psi'(\mathbf{x}', t') = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta'\,\Psi'(\mathbf{x}', t')\ , \tag{9}$$

dabei ist m die Masse. Die Galilei Transformation vom System F nach F' ändert die Darstellung der Wellenfunktion. Da Wellenfunktionen nur bis auf eine Phase bestimmt sind, lässt sich die Wellenfunktion in F ausdrücken mittels

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = e^{if(\mathbf{x},t)}\,\Psi'(\mathbf{x}', t')\ , \tag{10}$$

wobei f eine reale Funktion ist, die von den Koordinaten und Zeit abhängt. Bestimme die Funktion f derart, dass die Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{x}, t)$ die Schrödinger Gleichung im System F erfüllt und somit die Schrödinger Gleichung invariant unter Galilei Transformationen ist.

b) Als nächstes untersuchen wir das Verhalten der Schrödinger Gleichung bei einer Eichtransformation. Bei minimaler Kopplung lautet diese

$$\left\{\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\,\mathbf{A}\right)^2 + q\,\phi\right\}\Psi = i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\Psi\,, \tag{11}$$

wobei m die Masse, q die Ladung, c die Lichtgeschwindigkeit, $\mathbf{A}$ das Vektorpotential, ϕ das skalare Potential und Ψ die Wellenfunktion ist. Nun führen wir die Eichung

$$\mathbf{A} \ \rightarrow\ \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi\,, \tag{12}$$

$$\phi \ \rightarrow\ \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}\,, \tag{13}$$

durch, wobei $\chi = \chi(\mathbf{x}, t)$ eine beliebige skalare Funktion ist, um auf die transformierte Gleichung zu kommen

$$\left\{\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\,\mathbf{A}'\right)^2 + q\,\phi'\right\}\Psi' = i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\Psi'\,. \tag{14}$$

Wie muss Ψ' gewählt werden, damit die beiden Schrödinger Gleichungen äquivalent sind? Verwende hierzu die Idee aus Aufgabenteil a) und zeige durch explizites Rechnen, dass die beiden Schrödinger Gleichungen ineinander übergehen. Die minimale Kopplung ist daher die einzige Möglichkeit um Ladungen an elektromagnetische Felder zu koppeln, so dass die Eichinvarianz nicht gebrochen wird.