Theoretische Physik: Fortgeschrittene Vielteilchentheorie, Übung 13

Prof. Dr. Hans Peter Büchler WS 2012/13, 22. Januar 2013

Dirac-Gleichung im Magnetfeld

Wir wollen die relativistischen Elektronen im homogenen Magnetfeld untersuchen und die Eigenenergien, die Entartungen sowie die Wellenfunktionen bestimmen.

1. **Relativistische Elektronen im Magnetfeld I (Übungsstunde)**

   Wir starten mit der Herleitung einer notwendigen Bedingung für die Eigenwerte des Dirac Operators,

   $$H = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \pi_i + m\beta, \tag{1}$$

   Hier ist $\pi_i = p_i - \frac{e}{c} A_i$ der kanonische Impuls eines Teilchen der Ladung e im Magnetfeld mit dem Vektorpotential $\vec{A}$. Berechne nun H^2 und leite eine Gleichung für die Eigenwerte her. Aus welchem nicht-relativistischen Problem folgen die Eigenwerte dieser Gleichung gerade?

2. **Foldy-Wouthuysen Transformation (Übungsstunde)**

   Der Foldy-Wouthuysen Transformation sind wir bereits in der Vorlesung zur Herleitung des nicht-relativistichen Limit begegnet. Sie ist **generell anwendbar** auf ein Problem von der **Form** $H = Q + m\beta$, wobei Q und β gerade die Form annehmen

   $$Q = \begin{pmatrix} 0 & D^\dagger \\ D & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

   Q und H besitzen als selbstadjungierte Operatoren eine Polarzerlegung, z.B. $H = |H| \, \mathrm{sgn} H = \mathrm{sgn} H \, |H|$ mit $|H| = \sqrt{H^2}$ und $\mathrm{sgn} H \equiv |H|^{-1} H$ auf $(\ker H)^\perp$ und $\mathrm{sgn} H = 0$ auf $\ker H$. Zeige, dass

   $$U_{FW} = a_+ + \beta (\mathrm{sgn} Q) a_-, \text{ mit } \quad a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \pm m \, |H|^{-1}} \tag{3}$$

   ein unitärer Operator ist, welcher H diagonalisiert, d.h.

   $$H_{FW} = U_{FW} H U_{FW}^\dagger = \beta \, |H| = \begin{pmatrix} \sqrt{D^\dagger D + m^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{D D^\dagger + m^2} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

   Zeige im Anschluss, dass $H_{FW}^2 = H^2$ ist.

3. **Relativistische Elektronen im Magnetfeld II (Schriftlich)**

   Mit Hilfe der Foldy-Wouthuysen Transformation in Aufgabe 2 können wir nun das Spektrum der Dirac-Gleichung im Magnetfeld in 2 Dimensionen bestimmen. Dazu setzen wir $\pi_3 \equiv 0$, beschränken uns also auf Wellenfunktionen ohne z-Abhängigkeit.

- Zeige, dass die Dirac-Gleichung separiert in 2er Spinor-Räume mit jeweils einem Hamiltonian von der analogen Form $H = Q + m\beta$.

Bestimme das Spektrum und die Eigenfunktionen der Operatoren $D^\dagger D$ und $DD^\dagger$.

- Der Grundzustand von $N = D^\dagger D$ genügt der Gleichung $D\psi_0 = 0$, welche man mit dem Ansatz $\psi_0 = \mathrm{e}^{-\phi}\omega$ mit $\phi = eB/4 \cdot (x_1^2 + x_2^2)$ löst.
- Zeige, dass der Grundzustand eine hohe Entartung hat, und wir eine zusätzliche Quantenzahl einführen können mit der z-Komponente des Drehimpulses $J_3 = -ix_1\partial_2 + ix_2\partial_1 + \sigma_3/2$. (Der Drehimpulsoperator ist auch nach der F-W-Transformation von dieser Form).
- Die Operatoren $D^\dagger$ und D erfüllen $[D, D^\dagger] = 2eB$, und können somit als Auf- und Absteige Operatoren betrachtet werden. Bestimme daraus das Spektrum der Dirac-Gleichung.

4. **Relativistische Elektronen im Magnetfeld III - Supersymmetrie (Schriftlich)**

   Die Dirac-Gleichung ist ein Beispiel für Supersymmetrie. β ist eine Involution(selbstinverse Abbildung), denn $\beta^2 = 1$. Der Dirac Operator $H = Q + m\beta$ besteht aus einem ungerade Operator Q, welcher mit β antikommutiert und einen geraden Anteil $m\beta$. Die sog. Superladung $Q = Q^\dagger$ ist von der Form (2). Wie die Foldy-Wouthuysen Transformation zeigt, folgen ihre Eigenschaften aus dem (einfacheren) sog. supersymmetrischen Hamiltonian Q^2. Benutze dazu die die Polarzerlegung von Q und finde eine Isometrie zwischen $(\mathrm{ker} D)^\perp$ und $(\mathrm{ker} D^\dagger)^\perp$ aus welcher die unitären Äquivalenz von $D^\dagger D$ und $DD^\dagger$ folgt. Leite daraus mit Hilfe von $[D, D^\dagger] = 2eB$ die Lücken im Spektrum von $D^\dagger D$ und $DD^\dagger$ her.

Hinweis: $\mathrm{ker} H$ bezeichnet den Kern des Operators H, d.h. der Unterraum von H in welchem die Eigenwerte 0 sind. $(\mathrm{ker} H)^\perp$ bezeichnet den Unterraum, welcher orthognal zu diesem ist.