Theoretische Physik: Fortgeschrittene Vielteilchentheorie, Übung 14

Prof. Dr. Hans Peter Büchler WS 2012/13, 29. Januar 2013

1. **Fast Fourier Transformation im Quantencomputer (Übungsstunde)**

   In dieser Übungsaufgabe wollen wir den Quantenalgorithmus zur Fast Fourier Transformation verstehen. Wir betrachen die $N = 2^n$ Zustände $|j\rangle$ mit $j = 0...2^n - 1$.

   (a) Zeige, dass die Transformation U definiert mittels

   $$U|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi \mathrm{i} jk/N} |k\rangle \tag{1}$$

   eine unitäre Transformation auf dem Hilbertraum darstellt. Wendet man diese Transformation auf einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x_j |j\rangle$ an, so stellt die Amplitude $y_k = \langle k|U\psi\rangle$ gerade die Diskrete Fourier Transformation von x_j dar. Beweise diesen Zusammenhang und begründe, dass durch Messung der Amplituden $y_k = \langle k|U\psi\rangle$ ein Algorithmus zur Fast Fourier Transformation gegeben ist.

   (b) Wir betrachten nun als Beispiel den Fall mit $n = 2$, der sich mittels zwei Qubits realisieren lässt. Die Basiszustände $|s_1, s_2\rangle$ mit $s_i \in \{0, 1\}$ lassen sich einfach mit der Basis $|j\rangle$ verbinden mittels der binären Darstellung von $j = s_1\ 2 + s_2$. Zeige, dass sich die Transformation U schreiben lässt als

   $$U|j\rangle = U|s_1, s_2\rangle = \frac{1}{2} \left(|0\rangle + e^{2\pi \mathrm{i} s_2/2}|1\rangle\right) \left(|0\rangle + e^{2\pi \mathrm{i}(s_1/2+s_2/4)}|1\rangle\right). \tag{2}$$

   In dieser Darstellung lässt sich nun sehen, dass die Operation U durch einfache single-qubit und two-qubit Gattern realisieren lässt.

   (c) Wir starten mit dem Zustand $|j\rangle$ und wenden zuerst das Hadamar Gatter

   $$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

   auf das erste Qubit an. Zeige, dass dies den Zustand

   $$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + e^{2\pi \mathrm{i} s_1/2}|1\rangle\right) |s_2\rangle \tag{4}$$

   erzeugt. Als nächstes möchten wir noch einen Phasenverschiebung $e^{2\pi \mathrm{i} s_2/4}$ hinzufügen und den Zustand

   $$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + e^{2\pi \mathrm{i}(s_1/2+s_2/4)}|1\rangle\right) |s_2\rangle \tag{5}$$

   erzeugen. Welches two-qubit Gatter entspricht dieser unitären Transformation? Ein anschliessendes Hadamar Gatter auf das zweite Qubit und eine Vertauschung der beiden Qubits (eine SWAP Operation) erzeugt somit die volle Transformation U. Wie sieht die SWAP Operation aus?

(d) Verallgemeinere diesen Ansatz jetzt für beliebiges n und zeige, dass die Anzahl elementarer Operationen mit n^2 skaliert. Warum ist dies ein exponentioneller Speedup zum klassischen Computer?

2. Von-Neumann Gleichung (Übungsstunde)

Wir betrachten noch einmal die Dichtematrix $\rho = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$. Die zeitliche Entwicklung der Dichtematrix wird durch die **von-Neumann**-Gleichung beschrieben. Sie lautet

$$\dot{\rho} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \left[H, \rho\right]. \tag{6}$$

Leite die von-Neumann-Gleichung her.

3. Partielle Spur (Übungsstunde)

Betrachten wir ein Quantensystem, welches sich aus zwei Subsystemen A und B zusammensetzt. Die orthonormalen Basiszustände der Hilberträume H_A und H_B sind gegeben durch $\{\left|i\right\rangle_A\}$ und $\{\left|\mu\right\rangle_B\}$. Damit kann jeder reine Zustand $\left|\psi\right\rangle_{AB}$ des Gesamtsystems ($H_A \otimes H_B$) dargestellt werden durch die Entwicklung

$$\left|\psi\right\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} a_{i,\mu} \left|i\right\rangle_A \left|\mu\right\rangle_B, \tag{7}$$

mit der Normierung $\sum_{i,\mu} \left|a_{i,\mu}\right|^2 = 1$. Der Operator $M_A \otimes 1_B$ wirkt nur auf das Subsystem A.

(a) Zeige, dass

$$\langle M_A \rangle =_{AB} \langle\psi|M_A \otimes 1_B|\psi\rangle = Tr_A[M_A \rho_A], \tag{8}$$

und bestimme die sogenannte reduzierte Dichtematrix des Systems A. Dabei ist $Tr_A = \sum_{kA} \langle k|...|k\rangle_A$ die Spur über die Freiheitsgrade von System A.

(b) Zeige, dass

$$\rho_A = Tr_B[\left|\psi\right\rangle_{AB\,AB}\left\langle\psi\right|]. \tag{9}$$

(c) Als Beispiel betrachten wir zwei Spin 1/2 Systeme mit den jeweiligen Basisvektoren $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$. Gegeben sei der Zustand

$$\left|\psi\right\rangle_{AB} = u \left|\uparrow\right\rangle_A \left|\uparrow\right\rangle_B + v \left|\downarrow\right\rangle_A \left|\downarrow\right\rangle_B. \tag{10}$$

Berechne die volle Dichtematrix ρ und die reduzierte Dichtematrix ρ_A des Systems A. Beschreiben diese Dichtematrizen reine oder gemischte Zustände?