Theoretische Physik I: Mechanik

H. P. Büchler, Stuttgart

Sommersemester 09

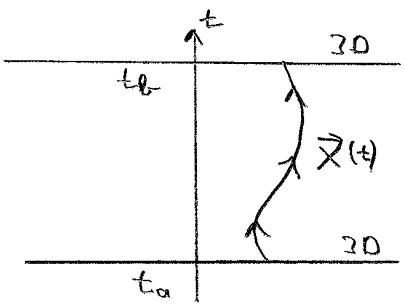
Literatur:

- Classical Mechanics, Goldstein, Poole, Safko
- Mathematical Methods of Classical Mechanics, Arnold
- Klassische Mechanik, Kuypers
- Mechanics, Landau-Lishitz
- Lectures of Physics, Feynman

1. Grundprinzipien

Wir beginnen mit den wichtigsten experimentellen Fakten auf denen die Klassische Mechanik aufbaut.

Raum und Zeit:



- Unser Raum ist ein 3-dimensionaler Euklidischer Raum und die Zeit ist ein-dimensional
- Ein Teilchen beschreibt eine Kurve in diesem (3+1)-dimensionalen Raum.

- Der Raum ist homogen und isotrop, d.h, kein Ort oder Richtung ist ausgezeichnet.
Ebenso ist die Zeit homogen, d.h, kein Zeitpunkt ist ausgezeichnet.

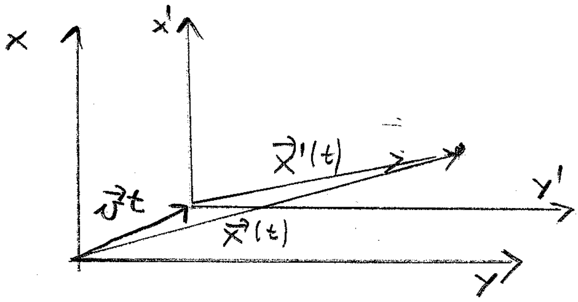
- Die Geschwindigkeit ist die Ableitung der Raumkurve nach der Zeit: $\vec{v} \equiv \frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \dot{\vec{x}}$

- Die Beschleunigung ist die zweite Ableitung

$$\vec{a} \equiv \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v} = \ddot{\vec{x}}$$

Trägheitsgesetz : (1. Gesetz von Newton)

Es gibt Inertialsysteme in denen alle Naturgesetze zu allen Zeiten gleich sind. Ein System, dass sich gleichförmig zu einem Inertialsystem bewegt, ist ebenfalls ein Inertial System



Somit ist die Beschleunigung die ein Teilchen erfährt in allen Inertialsystemen identisch.

Insbesonder erfährt ein Kräftefreies Teilchen keine Beschleunigung und bewegt sich gleichförmig, d.h. $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + t \cdot \vec{v}$. $\Rightarrow \ddot{\vec{x}} = 0$ mit konstanter Geschwindigkeit.

Eine gute Approximation für ein Inertialsystem ist ein Koordinatensystem mit festen Richtungen auf die Fixsterne., Die Beschleunigung unseres Sonnensystems um das Zentrum der Galaxie ist vernachlässigbar.

Ein auf der Erdoberfläche verankertes System ist wegen der Erdrotation, und der Bewegung der Erde um die Sonne kein perfektes Inertialsystem; aber genügend für die meisten Anwendungen.

Bsp: Foucault-Pendel, Rotation von Wirbelstürmen, etc.

<u>Bewegungsgesetz</u> (2. Gesetz von Newton)

Wir definieren den Impuls eines Teilchens als $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{x}}$.

Somit folgt die Bewegungsgleichung (im Inertialsystem)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} \text{ : Kraft auf das Teilchen}$$

Insbesondere gilt für ein System von Teilchen $\vec{x}_i(t)$, m_i $\quad i = 1 \dots N$

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i(\vec{x}_k, \dot{\vec{x}}_k, t) \quad \text{: Kräfte auf das } i\text{-te Teilchen}$$

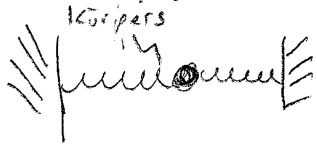
Die Trajektorien $\vec{x}_i(t)$ sind eindeutig bestimmt durch den Ort und Geschwindigkeit zur Zeit t_0 : $\vec{x}_i(t_0)$, $\vec{v}(t_0)$

$\Longrightarrow$ Die klassische Mechanik beschreibt ein vollkommen deterministisches Weltbild.

Masse: Die Masse m ist eine skalare Grösse und ist in allen Inertialsystemen gleich.
Sie beschreibt eine Eigenschaft des Teilchens/Körpers.

Ihre experimentelle Bestimmung erfolgt mittels Vergleich der Beschleunigungen für eine feste Kraft:

Federkraft, Schwingung des Körpers



$$\ddot{x}_a = \frac{F}{m_a} \qquad \ddot{x}_b = \frac{F}{m_b} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\ddot{x}_a}{\ddot{x}_b} = \frac{m_b}{m_a}$$

Actio = Reactio: (3. Gesetz von Newton)

Die Kraft $\vec{F}_{12}$ die das Teilchen 1 auf 2 ausübt, ist entgegengesetzt zur Kraft $\vec{F}_{21}$ die das Teilchen 2 auf 1 ausübt:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

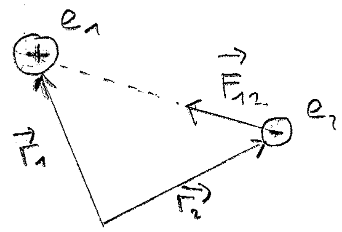
Somit lässt sich das Massenverhältnis sehr einfach bestimmen für zwei W.W. Teilchen:

$$\ddot{x}_1 = \frac{\vec{F}_{21}}{m_1} = -\frac{\vec{F}_{12}}{m_1} = -\frac{m_2}{m_1}\ddot{x}_2$$

Kraftgesetze:

In der Natur kennen wir 4 fundamentale Kräfte (Gravitation, Elektro-magnetische Kräfte, Starke und schwache Kräfte)
wobei 2 in der klassischen Mechanik eine Role spielen:

Coulomb Gesetz: $\vec{F}_{12} = + \hat{r}_{12} \dfrac{e_1 e_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}$ (Gauss Einheiten)



- $\hat{r}_{12} = \dfrac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$
- e_1, e_2 : el. Ladung

Gravitation: $\vec{F}_{12} = - \hat{r}_{12}\, G \dfrac{\hat{m}_1 \hat{m}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}$

- G : Gravitations Konstante

<u>Bem:</u> $\hat{m}$ in Gravitationsgesetz $\hat{=}$ Schwere Masse

m in Bewegungsgesetz $\hat{=}$ Träge Masse

Experimentelles Resultat: (Eötvös 1889, 1922)

- $\dfrac{\hat{m}}{m}$ = universelle Konstante

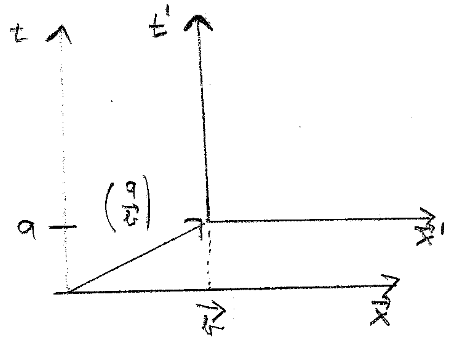
$\Longrightarrow$ Definiere G so dass $\hat{m} \equiv m$.

$\Longrightarrow$ Grundlage für die alg. Relativitäts Theorie.

Galilei Transformation:

Die galilei Transformationen beschreiben den Übergang von einem Inertialsystem, in ein anderes:

$$t' = t + a$$
$$\vec{x}' = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{b}$$



$t', \vec{x}'$: neue Koordinaten

Im (3+1)-Dimensionalen Raum können wir dies auch schreiben

$$\begin{pmatrix} t' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{v} & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

- Translationen in Raum und Zeit: $\vec{b}$, a
- Transformation auf uniforme Bewegung: (boost) $\vec{v}$
- Rotationen im Raum: $R \in SO(3)$ $\qquad RR^T = \mathbb{1}$
  (ortogonale 3×3 Matrix mit Determinante = 1)

Die galilei Transformationen sind durch

10 Parameter

bestimmt, und bilden eine 10parametrische Gruppe:

Galilei Gruppe

Bem: Die Galilei Transformationen $g \in G$ erfüllen:

- $g_2 \circ g_1 \in G$
- $(g_3 \circ g_2) \circ g_1 = g_3 \circ (g_2 \circ g_1)$ assoziative
- $g \circ \mathbb{1} = g = \mathbb{1} \circ g$ Einheit
- Es existiert Inverses g^{-1} mit $g^{-1} \circ g = \mathbb{1} = g \circ g^{-1}$
- nicht kommutative

Diskrete Galilei Transformationen

- Raumspiegelung $\vec{x}' = -\vec{x}$
- Zeitumkehr $t' = -t$

Symmetrien und Erhaltungsgrössen

Die Gesetze der klassischen Mechanik für ein abgeschlossenes System sind Forminvariant bei Galilei-Transformationen

Bem: Man sagt auch, dass die Galilei-Gruppe die Symmetrie Gruppe der kl. Mechanik ist. (ohne Zeitumkehr)

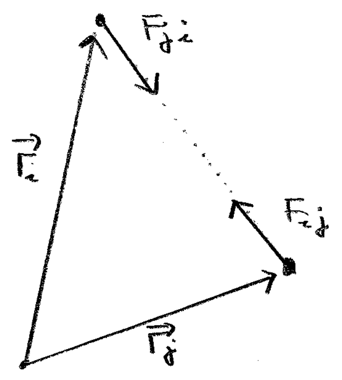
- Homogenität des Raumes: kein Punkt ist ausgezeichnet
  $\Longrightarrow$ nur relative Bewegung von Bedeutung
- Homogenität der Zeit: kein ausgezeichneter Zeitpunkt
  $\Longrightarrow$ Fundamentale Kräfte sind zeitunabhängig
- Isotropie des Raumes: keine ausgezeichnete Richtung
- Invarianz unter boosts: Geschwindigkeit hat nur relative Bedeutung; $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.
  Kein absolutes Ruhesystem.

Folgerungen aus der Galilei Invarianz:

- 2-Teilchen Kräfte, welche Geschwindigkeits-unabhängig sind, können geschrieben werden

$$F_{ij} = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \, f_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

- Die Kraft ist parallel zu $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ und hängt nur von der Distanz zwischen den Teilchen ab.



- Es folgt somit das 3 Gesetz von Newton direkt aus Galilei Invarianz

- Coulomb und Gravitation Kräfte haben diese Form mit

$$f_{ij}(r) \sim \frac{1}{r^2}$$

Bem:
- Fundamentale Kräfte die von der Geschwindigkeit abhängen existieren nicht in der Newtonschen Mechanik.

- Es sind keine Fundamentale 3-Teilchen Wechselwirkungen beobachtet worden

Somit folgen die 10 Erhaltungssätze:

Impulserhaltung:

Der totale Impuls $\vec{P}_{tot} = \sum_i \vec{p}_i$ ist erhalten.

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_{tot} = \sum_i \frac{d}{dt}\vec{p}_i = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = 0$$

$F_{ij} = -F_{ji}$

actio = reactio

$$\Longrightarrow \vec{P}_{tot} = \text{const.}$$

Schwerpunktssatz:

Der Schwerpunkt ist definiert als

$$\vec{X}_{tot} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{x}_i \qquad M = \sum_i m_i .$$

Der Schwerpunkt bewegt sich gleichförmig mit

$$\vec{X}_{tot}(t) = \vec{X}_0 + \frac{\vec{P}_{tot} \cdot t}{M}$$

Erhaltungs Grösse

Drehimpulserhaltung:

Der totale Drehimpuls ist definiert als

$$\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$$

Es gilt somit

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{tot} = \sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \wedge \vec{p}_i)$$

$$= \sum_i \Big[\underbrace{\dot{\vec{r}}_i \wedge \vec{p}_i}_{0} + \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{p}}\Big]$$

$$= \sum_{i \neq j} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} =$$

$$\vec{F}_{ji} \sim \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

(Zentralkräfte)

actio = reactio $\quad = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \wedge \vec{F}_{ji}$

$$= 0$$

und der totale Drehimpuls ist eine Erhaltungsgrösse

$$\vec{L}_{tot} = \text{const}$$

Energieerhaltung

Die Arbeit, die ein Teilchen im Kraftfeld verrichtet hat die Form

$$A = \int_\gamma d\vec{s} \cdot \vec{F}_i = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \vec{v} \cdot (m \dot{\vec{v}})$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \vec{v}^2 \right) = T_1 - T_0$$

mit der kinetischen Energie

$$T = m \frac{\vec{v}^2}{2} = \frac{\vec{p}^2}{2m} .$$

Andererseits ist für ein konservatives Kraftfeld

$$\int_\gamma d\vec{s}\, \vec{F}$$

unabhängig vom Weg, und es existiert ein Potential (skalares Feld)

$$V(\vec{r}) \quad \text{mit} \qquad F(\vec{r}) = - \nabla V(\vec{r})$$

Somit gilt $\quad A = T_1 - T_0 = \int_\gamma d\vec{s}\, F = V_0 - V_1 .$

Für konservative Kräfte gilt daher die Energieerhaltung

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) \equiv \text{const}$$

<u>Bem:</u> · Ein konservatives Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ muss daher erfüllen

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{r}) = 0$$

- Aus Galilei Invarianz haben wir gefolgert, dass die Kraft zwischen zwei Teilchen die Form hat

$$F_{ij} = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}\, f_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

und ist konservativ, d.h.

$$F_{ij} = -\nabla_i \underbrace{V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}_{\text{Stammfunktion von } f_{ij}(r)} \qquad V_{ij}(r) = \int dr\, f_{ij}(r)$$

- Somit hat die Energieerhaltung die Form

$$H = \sum_i \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m_i} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

- Das Coulomb / gravitations Potential hat die Form

$$V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \frac{e_1 e_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Die 10 Erhaltungssätze folgen direkt aus den 10 Symmetrie Transformationen der Galilei Gruppe. Es ist ein Fundamentales Konzept, dass Symmetrien auf Erhaltungsgrössen führt, und kann mittels dem Noether Theorem elegant formuliert werden. (siehe später)

<u>Bem:</u> In 3 Richtungen ist die klassische Mechanik nicht erfolgreich

i) mikroskopische Physik: auf sehr kleinen Längenskalen müssen wir zur Quantenmechanik übergehen

ii) hohe Geschwindigkeiten $\frac{v}{c} \sim 1$:
$\longrightarrow$ Relativitäts Theorie, Quantenfeld Theorie

iii) Gravitation mit $\frac{v}{c} \sim 1$ oder starken Gravitations feldern
$\longrightarrow$ alg. Relativitätstheorie

Die klassische Mechanik folgt jedoch immer aus diesen Erweiterten Theorien, wenn man zum Gültigkeitsbereich der klassischen Mechanik übergeht.