

2. Lagrange'sche Mechanik

Zur folgenden wollen wir zeigen, dass die Newtonschen Gleichungen mit Hilfe eines variations Prinzips formuliert werden können: dem sogenannten „Hamiltonischen Prinzip der kleinsten Wirkung“.

2.1 Euler-Lagrange Gleichung

Wir betrachten ein System von N -Teilchen mit den Koordinaten

$$q^i(t) \quad i = 1 \dots 3N$$

in einem konservativen Kraftfeld

$$F^i(q^1 \dots q^{3N}, t) = -\frac{\partial}{\partial q^i} V(q^1 \dots q^3, t)$$

Bem: • Ortsvektor \vec{r}_j des j -ten Teilchens hat die

Form $\vec{r}_j = \begin{pmatrix} q^{3j-2} \\ q^{3j-1} \\ q^{3j} \end{pmatrix}$ und,

$$\vec{F}_j = \begin{pmatrix} F^{3j-2} \\ F^{3j-1} \\ F^{3j} \end{pmatrix} \quad \text{die Kraft auf das } j\text{-teilchen.}$$

Die Newtonischen Gleichungen haben somit die Form

$$m_i \ddot{q}^i(t) = - \frac{\partial}{\partial q^i} V(q^1 \dots q^{3N}, t).$$

Den ersten Term können wir schreiben als partielle Ableitung der kinetischen Energie T

$$\begin{aligned} m_i \ddot{q}^i(t) &= \frac{d}{dt} (m_i \dot{q}^i) \\ &= \frac{d}{dt} \left[m_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} (\dot{q}^i)^2 \cdot \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} T \end{aligned}$$

mit der kinetischen Energie $T = \sum_i \frac{m_i}{2} (\dot{q}^i)^2$.

Wir definieren nun die Lagrange Funktion

$$\begin{aligned} L(q^1 \dots q^{3N}, \dot{q}^1 \dots \dot{q}^{3N}, t) \\ \equiv \sum_i \frac{m_i}{2} (\dot{q}^i)^2 - V(q^1 \dots q^{3N}) \end{aligned}$$

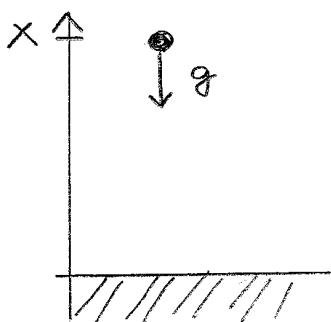
in kürzer Notation

$$L = T - V$$

Die Bewegungsgleichungen folgen somit aus den Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$$

Bsp:



- Ein Körper mit Masse m im Gravitationsfeld der Erde
- Koordinate x : Höhe oberhalb der Erdoberfläche
- Kinetische Energie $T = \frac{m}{2} \dot{x}^2$
- Potentielle Energie: $V = g \cdot m x$

- Die Lagrange Funktion hat die Form

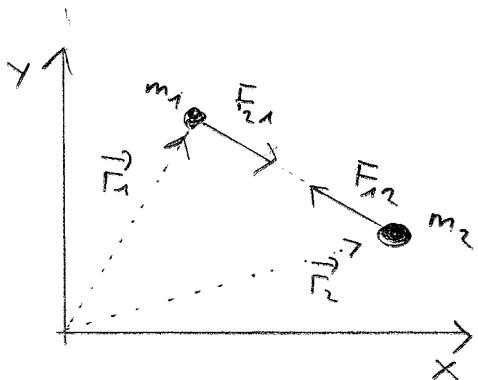
$$L(x, \dot{x}) = T - V = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - gm x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -gm$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m \ddot{x} + gm = 0$$

Bsp: • zwei Teilchen mit
Wechselwirkungspotential
 $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$



- kinetische Energie $T = \frac{m_1}{2} \left(\frac{d}{dt} \vec{r}_1 \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{d}{dt} \vec{r}_2 \right)^2 = \frac{m_1}{2} \vec{v}_1^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}_2^2$

- Potentielle Energie $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$

$$\Rightarrow L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{m_1}{2} \vec{v}_1^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}_2^2 - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

- $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1} = m_1 \vec{v}_1 \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_2} = m_2 \vec{v}_2$

- $\vec{F}_{21} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_2} = -\nabla_1 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \cdot V'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$

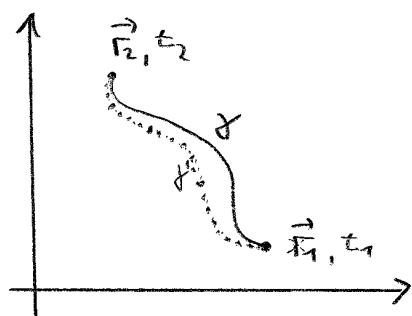
- $\vec{F}_{12} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1} = -\nabla_2 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \cdot V'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\vec{F}_{21}$

$$\Rightarrow m_1 \vec{v}_1 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_1} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1} = \vec{F}_{21}$$

$$m_2 \vec{v}_2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_2} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_2} = \vec{F}_{12}$$

2.2 Variationsrechnung

Zur folgenden etablieren wir die mathematischen Methoden, die zum Verständnis von Hamilton's Variations Prinzip wichtig sind.



Wir betrachten Kurven γ in \mathbb{R}^n mit der Parametrisierung
 $\gamma: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{pmatrix}$

mit festen Anfang \vec{r}_1 und Endpunkt \vec{r}_2

Das Integral

$$I(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i, \dot{q}^i; t)$$

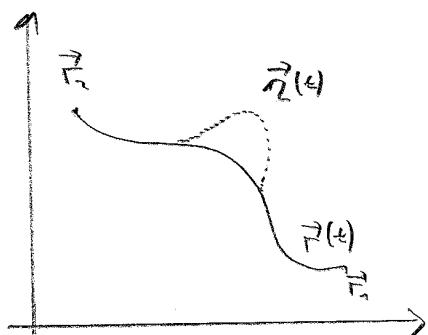
beschreibt ein Funktional, dass jede Raumkurve γ eine Zahl $I(\gamma)$ zuordnet.

Wir sind jetzt interessiert, an den Bedingungen an die Kurve γ , damit $I(\gamma)$ extremal ist.

Dazu betrachten wir eine kleine Variation der Kurve

$$\gamma'(\alpha): \quad t \mapsto \vec{r}(t) + \alpha \vec{\eta}(t) \equiv \vec{r}'(t)$$

$$q^i(t) + \alpha \eta^i(t) \equiv \tilde{q}^i(t)$$



mit festen Anfangs- und
Endpunkten:

$$\eta^i(t_1) = \eta^i(t_2) = 0$$

Dies führt mittels dem Funktional auf
eine neue Zahl

$$I[\gamma'(\alpha)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i, \dot{q}^i, t).$$

Def: Die Kurve γ heißt extremal zu dem
Funktional $I(\gamma)$, falls für alle
Variationen $\eta^i(t)$ gilt

$$\frac{d}{d\alpha} I[\gamma(\alpha)] \Big|_{\alpha=0} = 0$$

Einsetzen dieser Definition liefert

$$\frac{d}{d\alpha} I[\delta(\alpha)] \Big|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{d\alpha} L(q^i + \alpha \eta^i, \dot{q}^i + \alpha \dot{\eta}^i, t) \Big|_{\alpha=0}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} \eta^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{\eta}^i \right]$$

partielle
Integration

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] \eta^i + \underbrace{\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \eta^i}_{=0 \text{ d. Endpunkte}} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

fixiert

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial q^i} L(q^i, \dot{q}^i, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} L(q^i, \dot{q}^i, t) \right] \eta^i(t)$$

Damit dieser Ausdruck verschwindet für alle Variationen $\eta^i(t)$, muss der Integrand selber verschwinden.

Theorem: Eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit die Kurve $q^i(t)$ extremal zum Funktional $I(\delta)$ ist, ist dass erfüllen der Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} L(q^i, \dot{q}^i, t) - \frac{\partial}{\partial q^i} L(q^i, \dot{q}^i, t) = 0$$

2.3 Hamilton's Prinzip der kleinsten Wirkung

Die Bewegung eines Systems von der Zeit t_1 nach t_2 ist so, dass die Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L$$

mit dem Lagrange $L = T - V$
extremal ist.

Bew: aus der Variationsrechnung wissen wir, dass die extremale Kurve, die Euler-Lagrange Gleichungen erfüllt, diese Gleichungen sind aber identisch zu den Newtonischen Bewegungsgleichungen.

Bem: Die Dimension der Wirkung S ist somit

$$\cdot [Energie] \times [Zeit]$$

$$= [Impuls] \times [Länge]$$

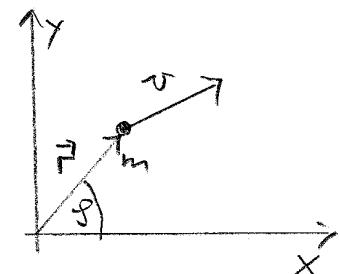
Mittels dem Hamiltonischen Prinzip sind die lokalen Bewegungsgleichungen durch ein globales Konzept der Extremalen Wirkung ersetzt worden.

Dies hat einige sehr markante Vorteile:

- Der Lagrange besteht aus experimentell zugänglichen Größen:
 - T : kinetische Energie
 - V : potentielle Energie
- Das Variationsprinzip ist invariant unter Koordinaten Transformationen
 \Rightarrow Es ist sehr einfach die Bewegungsgleichungen in sinnvollen Koordinaten zu erhalten.
- Die Größen $q^i(t)$ können beliebige verallgemeinerte Koordinaten sein, und müssen nicht die Einheit von Länge haben.
- Symmetrien und Erhaltungsräume sind im Lagrange Formalismus sehr elegant zu formulieren.

Bsp: Betrachte die kinetische Energie eines Teilchens in der Ebene

$$T = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2]$$



und in kartesischen Koordinaten haben die verallgemeinerten Koordinaten die Form

$$q^1 = x$$

$$q^2 = y.$$

Wir können jetzt in Polarkoordinaten wechseln:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2} [r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2]$$

mit den verallgemeinerten Koordinaten

$$\begin{aligned} q^1 &= r \\ q^2 &= \varphi \end{aligned} \Rightarrow L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

Es folgen die Bewegungsgleichungen in polar Koordinaten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt} m \dot{r} - m r \dot{\varphi}^2$$

$$= m \ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} m r^2 \dot{\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const}$$

Es folgt sofort, dass p_φ eine Erhaltungsgröße ist: Drehimpulserhaltung.

Bem: • $q^i(t)$: verallgemeinerte Koordinate

• $p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$: verallgemeinerter Impuls.
 \equiv kanonischer Impuls

• $\frac{\partial L}{\partial q^i}$: verallgemeinerte Kraft.

Def: Eine Koordinate q^i heißt zyklisch, wenn L nicht von q^i abhängt, d.h.,

$$\frac{\partial}{\partial q^i} L = 0$$

Theorem: Für zyklische Koordinaten ist der dazu gehörige kanonische Impuls eine Erhaltungsgröße

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} p_i = 0$$

$$\Rightarrow p_i = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{\text{Symmetrie}} = \text{const.}$$

Symmetrie Erhaltungssatz

Bsp: Teilchen in der Ebene in einem zentralen Potential $V(\sqrt{x^2+y^2})$

→ Polar Koordinaten

$$\rightarrow L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

→ φ ist zyklisch

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$$

Drehimpuls: $L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$

$$= m r^2 (\cos^2 \varphi \dot{r} + \sin^2 \varphi \dot{\varphi}) = m r^2 \dot{\varphi} = p_\varphi$$

Bem: Unterscheiden sich zwei Lagrange Funktionen L und L' durch eine totale Ableitung, d.h.

$$L' = L + \frac{d}{dt} F$$

so führt dies auf dieselbe Bewegungsgleichungen

Γ Die Wirkung der beiden Lagrange Funktionen unterscheidet sich nur um eine triviale Konstante

$$\begin{aligned} S[\delta] &= \int_{t_1}^{t_2} dt L' = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L + \frac{d}{dt} F \right] \\ &= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt L}_{\text{unabhängig vom Weg } \delta} + F \Big|_{t_1}^{t_2} = S[\delta] + \text{const} \end{aligned}$$

Damit ist δ sowohl extremal zu L wie L'

2.4 Lorentz Kraft

Aus dem Experimenten wissen wir, dass ein geladenes Teilchen im el. Feld \vec{E} und magnetische Feld \vec{B} die Lorentz Kraft erfährt

$$\vec{F} = e \vec{E} + e \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$$

Diese elektrodynamischen Felder, lassen sich mittels Potentiale schreiben (siehe TP:3)

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \quad : \phi \text{ skalar Potential}$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad : A \text{ Vektor Potential}$$

Die Lagrange Funktion hat dann die Form

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - e \underbrace{\left[\phi(\vec{r}, t) - \frac{\vec{r}}{c} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \right]}_{\text{Eichabhängig}}$$

Übungsaufgabe: Zeige, dass die Euler-Lagrange Gleichungen die Lorentz Kraft ergeben.

Der kanonische Impuls hat somit die Form

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m \vec{\dot{x}} + \frac{e}{c} \vec{A}$$

⚡ ↴
 kanonischer Impuls kinetischer Impuls
 keine Messgrösse Messgrösse

Die Potentiale ϕ, A sind nicht eindeutig, sondern lassen die Eichtransformationen die Felder \vec{E} und \vec{B} invariant

$$\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \lambda & \lambda : \text{skalar Feld} \\ \phi &\rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \lambda \end{aligned}$$

Der Lagrange hat unter einer Eichtransformation die Form

$$L \rightarrow L' = L + \underbrace{\frac{e}{c} \frac{d}{dt} \lambda(\vec{r}, t)}_{\text{totale Ableitung}}$$

\Rightarrow Eichtransformationen lassen die Bewegung invariant

2.5 Noether Theorem

Wir sind jetzt ganz allgemein einen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen aufzustellen.

Einen ersten Zusammenhang haben wir bereits für zyklische Koordinaten gesehen.

Wir betrachten eine kontinuierliche Kette von Koordinaten Transformationen

$$h_s^i : \begin{aligned} q^i &\rightarrow \tilde{q}^i = h_s^i(q^i) \\ \dot{q}^i &\rightarrow \dot{\tilde{q}}^i = \sum_j \frac{\partial h_s^i}{\partial q^j} \cdot \dot{q}^j \end{aligned}$$

Bsp: • Translationen:

$$\begin{aligned} q^i &\rightarrow \tilde{q}^i = q^i + s \alpha^i \\ \dot{q}^i &\rightarrow \dot{\tilde{q}}^i = \dot{q}^i \end{aligned}$$

Rotation um z-Achse
mit Winkel s

• Rotationen:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = R(s) \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}} \rightarrow \dot{\vec{r}}' = R(s) \dot{\vec{r}}$$

Diese Schar von Koordinaten Transformationen ist eine Symmetrie des Systems, wenn sie den Lagrange invariant lassen, d.h.

$$L(\tilde{q}^i, \dot{\tilde{q}}^i, t) = L(q^i, \dot{q}^i, t) \quad \text{für alle } s$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} L(\tilde{q}^i, \dot{\tilde{q}}^i, t) = 0$$

Noether : Für eine Symmetrie h_s^i , gibt es eine Erhaltungsgröße von der Form

$$I(q^i, \dot{q}^i) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q^i} \frac{d}{ds} h_s^i(q^i) \Big|_{s=0}$$

Bew: Falls $q^i(t)$ eine Bewegungskurve ist, so ist $\tilde{q}^i(t)$ ebenfalls eine Lösung der Euler-Lagrange Gleichungen, da L invariant ist.
Somit gilt

$$0 = \frac{d}{ds} L(\tilde{q}^i, \dot{\tilde{q}}^i, t) = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \cdot \frac{d}{ds} \tilde{q}^i + \frac{\partial L}{\partial q^i} \frac{d}{ds} \dot{q}^i \right]$$

Setzte Bewegungs Gleichung ein

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_i \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \cdot \frac{d}{ds} \tilde{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \underbrace{\frac{d}{ds} \tilde{\dot{q}}^i}_{\frac{d}{ds} h_s(q^i)} \right] \\
 &= \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \cdot \frac{d}{ds} \tilde{q}^i \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \left[I(q^i, \dot{q}^i) \right] = 0 \Rightarrow I(q^i, \dot{q}^i) = \text{const.} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Bem: • Translations Symmetrie:

wir betrachten die Symmetrie

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_i &\rightarrow \vec{r}_i + s \vec{a} \\
 \dot{\vec{r}}_i &\rightarrow \dot{\vec{r}}_i
 \end{aligned}
 \quad \begin{matrix} \text{beliebiger translations} \\ \text{vektor} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} (\vec{r}_i + s \vec{a}) = \vec{a}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \vec{p}_i = m \dot{\vec{r}}_i$$

$$\Rightarrow \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{a} = \left(\sum_i \vec{p}_i \right) \cdot \vec{a} = \vec{p}_{\text{tot}} \cdot \vec{a} = \text{const}$$

Die Erhaltung des totalen Impulses

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \text{const}$$

folgt aus Translations Symmetry.

• Rotations Symmetrie:

Für kleine Rotationswinkel s können wir die Rotation um die \vec{n} -Achse schreiben

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + s \vec{n} \wedge \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + s \vec{n} \wedge \vec{r}_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} \vec{r}_i = \vec{n} \wedge \vec{r}_i$$

Das Noether Theorem ergibt die Erhaltungsgröße

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{p}_i \cdot (\vec{n} \wedge \vec{r}_i) &= \left(\sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i \right) \cdot \vec{n} \\ &= \vec{L}_{\text{tot}} \cdot \vec{n} \quad \text{für alle Rotationsachsen} \end{aligned}$$

\Rightarrow Die Erhaltung des Drehimpulses

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i = \text{const}$$

erfolgt aus Rotations Symmetrie.

Übungsaufgabe: Wenn die Rotationssymmetrie nur rund um die z -Achse gegeben ist, welcher Teil des Drehimpulses ist noch erhalten?

- Galilei Boost: $\vec{P}_i \rightarrow \vec{P}_i + s \vec{v} t$
 $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + s \vec{v}$

Der Lagrange ist jetzt nicht mehr erhalten,
sondern erhält eine totale Ableitung

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L + \sum_i \left[\frac{m_i}{2} s^2 \vec{v}^2 + m_i \vec{P} \cdot \vec{v} \right] \\ &= L + \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} s^2 \vec{v}^2 + m_i \vec{P} \cdot \vec{v}}_{F(q^i, \dot{q}^i, s)} \right) \end{aligned}$$

Die Erhaltungsgröße hat dann die Form $F(q^i, \dot{q}^i, s)$

Form

$$I(q^i, \dot{q}^i) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q^i} \cdot \frac{d \ln(s) (q^i)}{ds} - \frac{\partial}{\partial s} F(q^i, \dot{q}^i) \Big|_{s=0}$$

Damit folgt der Schwerpunktssatz

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{P}_i \cdot \vec{v} \cdot t - \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{v} \\ = \underbrace{\left(\sum_i \vec{P}_i \cdot t - \sum_i m_i \vec{r}_i \right)}_{\text{Erhaltungsgröße}} \cdot \vec{v} = \text{const} \end{aligned}$$

Energie Erhaltung:

Zuletzt betrachten wir noch die Energieerhaltung, die aus der Homogenität in der Zeit folgt:

$$t \rightarrow t + a$$

$$L \rightarrow L' = L$$

$\Rightarrow L$ ist nicht explizit zeitabhängig

$$L(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} L = 0$$

$$= L(q^i, \dot{q}^i)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(q^i, \dot{q}^i) &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q^i} \cdot \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \cdot \ddot{q}^i \\ &= \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \left(\frac{d}{dt} \dot{q}^i \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i) \right) = 0$$

$\brace{ \quad }$

$$\equiv H$$

Die Energie

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L(\dot{q}^i, \ddot{q}^i)$$

ist eine Erhaltungsgröße, die aus Translationssymmetrie in der Zeit folgt.

Bem: Für Geschwindigkeitsunabhängiges Potential $V(q^i)$ gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}$$

$$\Rightarrow H = \underbrace{\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i}_{2T} - L = 2T - T + V = T + V$$

Damit haben wir jede Symmetrie der Galilei Gruppe eine Erhaltungsgröße gefunden

