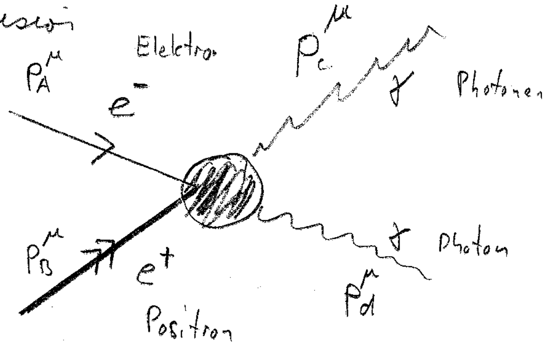
<u>Bsp:</u> • elektron - positron Kollision



• $e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$

• rel. Impuls und Energie Erhaltung

$$p_A^\mu + p_B^\mu = p_c^\mu + p_D^\mu$$

• Elektron und Positron in Ruhe

$$\Rightarrow \quad E_A + E_B = 2 m_e c^2 = 2 E_\gamma = E_C + E_D$$

$\Rightarrow$ Ein Photon hat somit die Energie $m_e c^2$.

• Analog für andere Teilchen Prozesse

z.B: $p + \bar{p} \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$

proton, anti-proton, Pionen

• Die Sonne strahlt Energie ab in Form von Photonen. Durch diesen Energieverlust, wird die Sonne auch leichter.

Bem: Es gibt weitere wichtige 4-Vektoren:

- Wellenvektor von Lichtwellen

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \vec{k} \end{pmatrix} \qquad k_\mu = \begin{pmatrix} \omega/c \\ -\vec{k} \end{pmatrix}$$

Somit ist auch die Phase

$$e^{i x^\mu k_\mu} = e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{x})}$$

eine skalare Grösse.

- Strom-Dichte:

$$j^\mu = \begin{pmatrix} \gamma \rho \\ \gamma \vec{j} \end{pmatrix}$$

Ladungs-Dichte

Teilchen-strom Dichte

- el. mag. Potential

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$$

Skalar Potential

Vektor Potential

- Ableitungs Operator

$$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \partial_t/c \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix} \qquad \partial^\mu = \begin{pmatrix} \partial_t/c \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial^\nu g_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta$$: D'Alembert Operator

- Ein weitere Grösse, die sich wie ein Tensor 2 Stufe verhält ist der el. mag. Feld Tensor:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Diese grösse Transformiert unter einer Lorentztransformation mit

$$(F^{\mu\nu})' = \Lambda^\mu_{\ \alpha} \Lambda^\nu_{\ \beta} F^{\alpha\beta}$$

- Die Maxwell Gleichungen lauten

- $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\nu$: Lorentz invariant

- $\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} = 0$: Lorentz invariant

5.4 Dopplereffekt

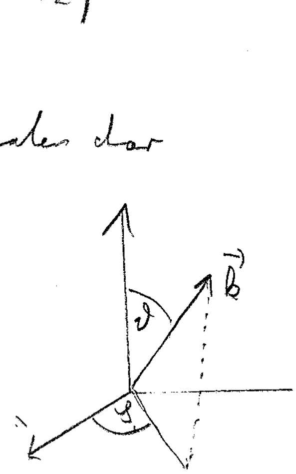
Der Wellenvektor $k^\mu = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \vec{k} \end{pmatrix}$ transformiert sich wie der Ortsvektor x^μ.

Das Inertialsystem K' bewegt sich mit Geschwindigkeit v entlang der z-Achse von K. Somit hat der Wellenvektor $k^{\mu'}$ im System K' die Form

$$k_x' = k_x \qquad k_z' = \gamma\left(k_z - \beta \frac{\omega}{c}\right)$$

$$k_y' = k_y \qquad \omega' = \gamma\left(\omega - v\, k_z\right)$$

Stellen wir $\vec{k}$ und $\vec{k}'$ in Kugelkoordinaten dar mit $\frac{\omega}{c} = |\vec{k}|$ und $\frac{\omega'}{c} = |\vec{k}'|$ so folgt



$$\omega' = \gamma\, \omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos\vartheta\right)$$

: rel. Doppler Effekt

Für Ausbreitung entlang des boost, d.h. $\vartheta = 0$ erhalten wir $\omega' = \omega \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

5.5 Relativistisches Kraftgesetz

Für kleine Geschwindigkeiten $v \to 0$ gilt das Newton'sche Gesetz

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Wir können dies als 4-Vektor schreiben als

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = f^\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{d\tau} p^\alpha = f^\alpha$$

$$m \frac{d^2}{d\tau^2} \underline{x} = \underline{f} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{d\tau} \underline{p} = \underline{f}$$

wobei im Ruhesystem die Kraft die Form haben muss

$$\underline{f}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F} \end{pmatrix}$$

$\vec{F}$: nicht-relativistische Kraft für $\vec{v} = 0$

Aus Invarianz der Bewegungsgleichung in allen Inertialsystemen folgt somit die Kraft

$$f^\alpha = \underbrace{\Lambda^\alpha{}_\beta(-\vec{v})}_{\text{Transformation ins Laborsystem}} f_0^\beta$$

$$\underline{f} = \Lambda \underline{f}_0$$

Somit erhalten wir die relativistische Kraft

$$f^\alpha = \begin{pmatrix} f^0 \\ \vec{f} \end{pmatrix}$$

mit $\quad f^0 = \gamma \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{F} \qquad$: Änderung der Energie

$$\vec{f} = \vec{F} + (\gamma - 1) \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{v^2} \vec{v}$$

Für die el. Dynamik ergibt dies Kraftgleichung

$$\frac{d}{d\tau} p^\alpha = \frac{e}{c} F^{\alpha\beta} u_\beta \qquad F_{\alpha\beta} : \text{el. mag. Feld Tensor}$$

$$\frac{d}{d\tau} p_\alpha = \frac{e}{c} F_{\alpha\beta} u^\beta$$

und in Komponenten

$$\frac{d}{dt} (\gamma m \vec{v}) = e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \quad : \text{Lorentzkraft}$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma m c^2) = e \vec{E} \cdot \vec{v} \quad : \text{geleistete Arbeit}$$

Bew: Im Ruhesystem haben wir nur die elektrostatik

$$\vec{F} = e\,\vec{E} \quad : \vec{E} \text{ el Feld}$$

mit Hilfe des el. Feldtensors im Ruhesystem

$$F_0^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & B_y \\ +E_y & B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

gilt daher

$$f_0^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F} \end{pmatrix} = \frac{e}{c} F_0^{\alpha\beta} u_\beta \qquad u_\beta^0 = g_{\beta\nu} u_0^\nu = g_{\beta\nu} \frac{d}{d\tau} x_0^\nu$$

$$= \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{: Ruhesystem}$$

$$\Longrightarrow f^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta f_0^\beta = \frac{e}{c} \Lambda^\alpha{}_\beta F_0^{\beta\nu} g_{\nu\mu} u_0^\mu$$

$$= \frac{e}{c} \underbrace{\Lambda^\alpha{}_\beta F_0^{\beta\nu} \Lambda^\gamma{}_\nu}_{F^{\alpha\gamma}\text{ : Feldtensor im Laborsystem}} g_{\gamma\delta} \underbrace{\Lambda^\delta{}_\mu u_0^\mu}_{u^\delta \text{ im Laborsystem}}$$

$$= \frac{e}{c} F^{\alpha\gamma} u_\gamma$$

$$u_\gamma = \begin{pmatrix} c\gamma \\ -\gamma\vec{v} \end{pmatrix} \qquad = \frac{e}{c} \begin{pmatrix} c\gamma\,\vec{E}\cdot\vec{v} \\ c\gamma\,\vec{E} + \gamma\,\vec{v}\wedge\vec{B} \end{pmatrix} = \gamma \frac{d}{dt} m u^\alpha = \gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} E/c \\ m\gamma\vec{v} \end{pmatrix}$$

5.6 Variations Prinzip

Diese Bewegungsgleichung folgt aus dem relativistischen Wirkung

$$S_{rel} = \int d\lambda \, L$$

und dem Lagrange

$$L\left(x^\mu(\lambda), \frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)$$

$$= -mc\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}} - \frac{e}{c}A_\mu(x^\nu(\lambda))\frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

wobei $x^\mu(\lambda)$ eine Parametrisierung der Bewegungskurve ist. Die Wirkung ist Lorentzinvariant und unabhängig von der Parametrisierung λ.

- Die Variationsrechnung liefert

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\lambda}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$$

- $$\frac{\partial L}{\partial \frac{x^\mu}{\partial\lambda}} = -\frac{1}{2}\frac{mc}{\underbrace{\sqrt{g_{\mu\nu}\dots}}_{c}} 2\cdot\frac{d}{d\lambda}x_\mu - \frac{e}{c}A_\mu$$

$$= -m\frac{dx_\mu}{d\lambda} - \frac{e}{c}A_\mu$$

- $$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = -\frac{e}{c}\,\partial_\mu A_\nu \frac{d}{d\lambda}x^\nu$$

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\mu}{d\lambda}} = -m\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\lambda}x_\mu - \frac{e}{c}\,\partial_\nu A_\mu \cdot \frac{d}{d\lambda}x^\nu$$

Somit folgt mittels der Euler-Lagrange Gleichungen

$$m\frac{d^2}{d\lambda^2}x_\mu = \frac{e}{c}\frac{d}{d\lambda}x^\nu \underbrace{\left[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right]}_{F_{\mu\nu}}$$

Setze $\lambda = \tau$ der Eigenzeit und es folgt

$$\frac{d}{d\tau}p_\mu = \frac{e}{c}F_{\mu\nu}u^\nu$$

<u>Bem:</u> Für $\lambda = t$ und kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ erhalten wir die klassische Lagrangefunktion und Wirkung

$$S_{rel} \longrightarrow \int dt\, L$$

$$L \longrightarrow \underbrace{-mc^2}_{\substack{\text{irrelevante}\\\text{Konstante}}} + \underbrace{\frac{m}{2}v^2}_{T} - \underbrace{e\varphi}_{V} + \underbrace{\frac{e}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}}_{\substack{\text{Anteil für}\\\text{Lorentzkraft}}}$$