6 Starre Körper

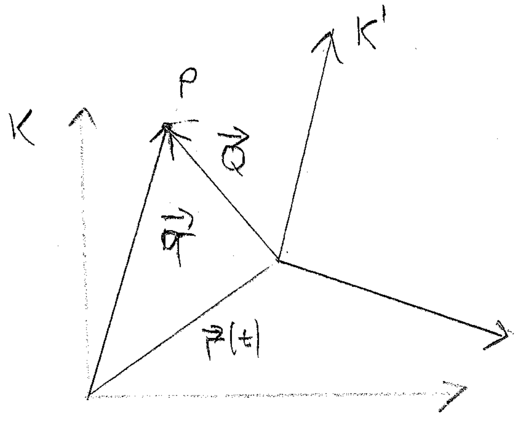
6.1 Bewegung im Beschleunigten Bezugssystem, Scheinkräfte

Ein Punktteilchen ist in einem Inertialsystem durch den Lagrange

$$L(\vec{q}\,\dot{\vec{q}}) = T - V$$

beschrieben, und folgt der Newtonschen Gleichung $m\ddot{\vec{q}} = -\nabla V = \vec{F}$

In einem Beschleunigten Koordinatensystem treten dann zusätzliche Terme auf, die wir als Scheinkräfte interpretieren.



- Inertialsystem K mit Koordinaten $\vec{q}$
- Bewegtes System K' mit Koordinaten $\vec{Q}$
- Rotation und Translation

$$\vec{q} = B\cdot\vec{Q} + \vec{r}$$

B : Rotations Matrix

$\vec{r}$: Translations vektor

Somit lässt sich die reale Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{q}}$ des Teilchens beschreiben als

$$\dot{\vec{q}} = \underbrace{\dot{B}\vec{Q}}_{\text{Rotations Bewegung}} + \underbrace{B\dot{\vec{Q}}}_{\text{Bewegung im System } K'} + \underbrace{\dot{\vec{r}}}_{\text{Translations Bewegung von } K'}$$

Im folgenden Untersuchen wir Translation und Rotation getrennt.

• Translations Bewegung: $\dot{q} = \dot{Q} + \dot{\vec{r}}$ und der Lagrange hat die Form
($B = \mathbb{1}$)

$$L(Q, \dot{Q}) = \frac{m}{2}\left(\dot{\vec{Q}} + \dot{\vec{r}}\right)^2 - V$$

$$= \frac{m}{2}\dot{\vec{Q}}^2 + m\dot{\vec{Q}}\cdot\dot{\vec{r}} + \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V$$

$$= \frac{m}{2}\dot{\vec{Q}}^2 - m\vec{Q}\ddot{\vec{r}} - V + \underbrace{\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{d}{dt}\left(\vec{Q}\cdot\dot{\vec{r}}\right)}_{\text{irrelevanten Terme}}$$

$$= \frac{m}{2}\dot{\vec{Q}}^2 - \left(V + m\vec{Q}\cdot\vec{a}_s\right)$$

Dabei Beschreibt $\vec{a}_s \equiv \ddot{\vec{r}}$ die Beschleunigung des Systems K'.

Mittels den Euler-Lagrange-Gl. erhalten wir somit

$$m\ddot{\vec{Q}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{Q}} - \underbrace{m\,\vec{a}_s(t)}_{\text{Scheinkraft durch Bewegung des Systems}}$$

<u>2 Rotationen:</u> ($\vec{r}=0$)

somit ist $\dot{\vec{q}} = B\dot{\vec{Q}} + \dot{B}\vec{Q}$

Für eine beliebige Rotation lässt sich $\dot{B}Q$ schreiben als

$$\dot{B}Q = \vec{\omega} \wedge \vec{q}$$

wobei $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit darstellt.

<u>Bem:</u> $\vec{\omega}$ ist die Winkelgeschwindigkeit im Ruhesystem K

. $\vec{\Omega} = B^{-1}\vec{\omega}$ ist die Winkelgeschwindigkeit im beschleunigten System K'

<u>Bew:</u> · Es gilt

$$\dot{B}\,\vec{Q} = \dot{B}\,B^{-1}\vec{q}$$

· B ist rotation $\Longrightarrow$ $B \cdot B^{T} = \mathbb{1}$ $\quad B^{-1} = B^{T}$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt} B B^{t} = \dot{B} B^{T} + B \dot{B}^{T} = 0$$

$$\Longrightarrow \dot{B} B^{T} = -\left(\dot{B} B^{T}\right)^{T}$$

und somit ist $\dot{B} B^{T}$ antisymmetrisch und lässt sich schreiben als

$$\dot{B}\,B^{T} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Für anti-symmetrische Matrix gilt aber

$$\dot{B}\,B^{T}\vec{q} = \vec{\omega} \wedge \vec{q} \quad \Longrightarrow \quad \dot{B}\,\vec{Q} = \vec{\omega} \wedge \vec{q} \quad \blacksquare$$

Wir setzen jetzt diese Beziehung in den Lagrange ein:

$$T = \frac{m}{2}\,\dot{\vec{q}}^{\,2} = \frac{m}{2}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{q} + B\dot{\vec{Q}}\right)^{2}$$

$$B^{-1}(\vec{\omega} \wedge \vec{q}) = (B^{-1}\vec{\omega}) \wedge (B^{-1}\vec{q}) = \vec{\Omega} \wedge \vec{Q}$$

$$= \frac{m}{2}\left(B\,\vec{\Omega} \wedge \vec{Q} + B\dot{\vec{Q}}\right)^{2}$$

$$= \frac{m}{2}\,B\dot{\vec{Q}} \cdot B\dot{\vec{Q}} + m\,B\dot{\vec{Q}} \cdot B\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{Q}\right) + \frac{m}{2}\left[B\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{Q}\right)\right]^{2}$$

$$= \frac{m}{2}\,\dot{\vec{Q}}^{\,2} + m\,\dot{\vec{Q}} \cdot \vec{\Omega} \wedge \vec{Q} + \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega} \wedge \vec{Q}\right)^{2}$$

Somit erhalten wir die Lagrange Funktion in einem rotierenden System

$$L(\vec{Q},\dot{\vec{Q}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{Q}}^2 + m\dot{\vec{Q}}\cdot\vec{\Omega}\wedge\vec{Q} + \frac{m}{2}(\vec{\Omega}\wedge\vec{Q})^2$$

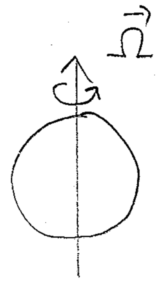
und mittels Euler-Lagrange

$$m\ddot{\vec{Q}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{Q}} \quad \text{: wahren Kräfte}$$

$$+ m\vec{\Omega}\wedge(\vec{Q}\wedge\vec{\Omega}) \quad \text{: Zentrifugalkraft}$$

$$+ 2m\dot{\vec{Q}}\wedge\vec{\Omega} \quad \text{: Corriolis kraft}$$

$$+ m\,Q\wedge\dot{\vec{\Omega}}$$



Bsp: · Rotation der Erde
In der Nordhalbkugel,
werden Luftströmungen
abgelenkt $\longrightarrow$ Gegenuhrzeiger Sinn

In der Südhalbkugel ist die Ablenkung
entgegengesetzt
$\longrightarrow$ Wirbel im Uhrzeigersinn

· Foucault Pendel : Rotation eines hangenden Pendels.

6.2 Starre Körper

Ein starrer Körper ist die Idealisierung eines festen Körpers, wobei die Distanz zwischen den Teilchen fixiert ist

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = r_{ij} = const$$

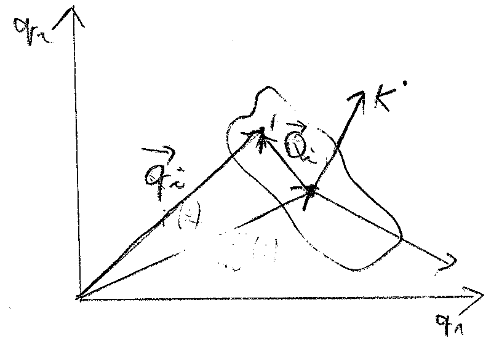
Dies ist ein spezial Fall von holonomen Zwangsbedingungen.

Bem: Die Bewegung eines starren Körpers ist ausgezeichnet durch die Lage des Körpers (Rotation um einen Punkt) und die Bewegung dieses Punktes.

$$\text{Konfigurationsmannigfaltigkeit} = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$$

Wir führen daher zwei Koordinatensysteme ein:

- Inertialsystem K, q_i
- körperfestes System K', $\vec{Q}_i$ mit Ursprung in $\vec{r}(t)$



Erhaltungsgrössen:

- Für einen freien Körper bewegt sich der Schwerpunkt gleichförmig

- Die Bewegung der starren Körpers um einen festen Punkt O in Absenz von externen Kräften, ist der totale Drehimpuls und die Energie erhalten.

Im folgenden betrachten wir die Bewegung mit festen Punkt O.

Notation:

$\vec{q}_i$: Position des Teilchen i

$\vec{Q}_i$: Position im Körper festen System $\vec{q}_i = B\vec{Q}_i$

$\vec{\omega}$: Winkelgeschwindigkeit

$\vec{\Omega}$: " in Körper festen System

$\omega = B\Omega$

$\vec{m}$: Drehimpuls

$\vec{M}$: Drehimpuls im Körper festen System

Wir haben somit die Geschwindigkeit

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge (\vec{q}_i - \vec{r}) + \dot{\vec{r}}$$ Bewegung des Punktes O

und die kin. Energie

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^{\,2}$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\vec{r}} \underbrace{\left(\sum_i m_i\right)}_{M \text{ : totale Masse}} + \dot{\vec{r}} \cdot \sum_i m_i \left[\omega \wedge (\vec{q}_i - \vec{r})\right]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\omega \wedge (\vec{q}_i - \vec{r})\right]^2$$

Im folgenden betrachten wir 2-Fälle:

- O Schwerpunkt $\Longrightarrow$ $\sum_{bc} m_i (\vec{q}_i - \vec{r}) = 0$
- O fixiert $\Longrightarrow$ $\dot{\vec{r}} = 0$

Somit lässt sich die kinetische Energie des Körpers schreiben

$$T = \underbrace{\frac{M}{2} \dot{\vec{r}}^{\,2}}_{\text{Schwerpunkt Energie}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\Omega} \wedge \vec{Q}_i)^2}_{\text{Rotations Energie des Körpers}}$$

Die Rotation Energie lässt sich schreiben

$$T_R = \sum_i \frac{m_i}{2} \left[\Omega^2 \vec{Q}_i^{\,2} - (\vec{\Omega} \cdot \vec{Q})^2 \right]$$

$$= \sum_{jk=1}^{3} \Omega_j \Omega_k \sum_i \left[\delta^{jk} \vec{Q}_i^{\,2} - Q_i^j Q_i^k \right] \frac{m_i}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{jk} \underbrace{I^{jk}}_{\text{Trägheitstensor}} \Omega_j \Omega_k \equiv \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot I \vec{\Omega}$$

Die Elemente des Trägheitstensors haben die Form

$$I^{jk} = \underbrace{\sum_i}_{\text{Summe über alle Teilchen}} m_i \left(\delta^{jk} Q_i^2 - Q_i^j Q_i^k \right)$$

$$= \int d^3r \; \underbrace{\rho(\vec{r})}_{\text{Massen Dichte des starren Körpers}} \left[r^2 - r^j r^k \right]$$

Bem: · $M = \int d^3r \; \rho(\vec{r})$: totale Masse

· $\vec{r}_s = \frac{1}{M} \int d^3r \; \rho(\vec{r}) \; \vec{r}$: Schwerpunkt

Der Trägheitstensor ist symmetrisch und positiv. Somit kann mit geeigneter Wahl des körperfesten Systems K', der Trägheitstensor diagonalisiert werden

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & & 0 \\ & I_2 & \\ 0 & & I_3 \end{pmatrix}$$

Hauptträgheitsmomente : entlang der Hauptträgheitsachsen

$$\Rightarrow T_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} I_i \Omega_i^2$$

Bem: • $I_1 + I_2 \geq I_3$

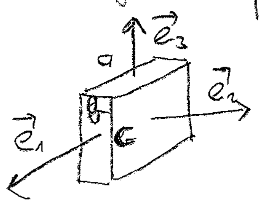
$$\ulcorner I_1 + I_2 = \int d^3r\, \rho(r) \left[2 r^2 - r_1^2 - r_2^2 \right]$$
$$= \int d^3r\, \rho(r) \left[r_1^2 + r_2^2 + 2 r_3^2 \right] \geq \int d^3r\, \rho(\vec{r}) \left[r_1^2 + r_2^2 \right] = I_3 \lrcorner$$

• $I_1 = I_2 = I_3$: Kugelkreisel

$I_1 = I_2 \neq I_3$: symm. Kreisel

$I_1 \neq I_2 \neq I_3$: unsymm Kreisel

Bsp: · Homogener Quader



$$I_1 = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2)$$
$$I_2 = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2)$$
$$I_3 = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

· homogene Kugel

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

· homogener Zylinder

$$I_1 = \frac{1}{2} m R^2$$
$$I_2 = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m l^2$$

Satz von Steiner: Es sei I^{jk} der Trägheitstensor relativ zum Schwerpunkt. So gilt für den Trägheitstensor $\tilde{I}^{jk}$ bezüglich einem um $\vec{a}$ verschobenen Punkt

$$\tilde{I}^{jk} = I^{jk} + M\left[\delta^{jk} a^2 - a^j a^k\right]$$

Bew: $\tilde{r}_i = \vec{r}_i + \vec{a}$, einsetzen und rechnen ■

Drehimpuls: Für den Drehimpuls bezüglich eines körperfesten Punktes gilt (Dieser Punkt ist ruhend im Laborsystem)

$$\vec{m} = \sum_i m_i \, \vec{q}_i \wedge \vec{v}_i$$

$$= \sum_i m_i \, \vec{q}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{q}_i)$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{M} = B^{-1}\vec{m} = \sum_i m_i \, \vec{Q}_i \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{Q}_i)$$

$$= \sum_i m_i \left[\vec{\Omega}\, Q_i^2 - \vec{Q}_i (\vec{Q}_i \cdot \vec{\Omega})\right] = I \cdot \vec{\Omega}$$

$$\vec{M}^j = \sum_k I^{jk} \Omega_k = \sum_k \Omega_k \sum_i \left(\delta^{jk} Q_i^2 - Q_i^j Q_i^k\right)$$

Bem: • Der Drehimpuls $\vec{M}$ ist im alg. nicht parallel zur Drehachse $\vec{\Omega}$

• Für ein freies System ist der Drehimpuls im Laborsystem erhalten

$\vec{m} = \text{const}$

aber nicht zwingend der Drehimpuls im rotierenden Koordinaten System

$\vec{m} = \text{const}$ aber $\vec{M} \neq \text{const}$

Falls der Körper nicht nur rotiert, so ist es optimal den Ursprung des bewegten Koordinatensystems in den Schwerpunkt zu setzen.

$$\vec{q}_i = B\vec{Q}_i + \vec{r}_s \sim \text{Schwerpunkt Koordinate}$$

$$\dot{\vec{q}}_i = B(\vec{\Omega} \wedge \vec{Q}_i) + \vec{v}_s \sim \text{Geschwindigkeit des Schwerpunktes}$$

$$\vec{J} = \sum_i m_i \, (\vec{Q}_i + \vec{R}_s) \wedge \left[\vec{\Omega} \wedge \vec{Q}_i + \vec{V}_s\right] \qquad \begin{aligned} \vec{r}_s &= B\vec{R}_s \\ \vec{v}_s &= B\vec{V}_s \end{aligned}$$

$$= \underbrace{M_{tot} \vec{R}_s \wedge \vec{V}_s}_{\text{Bahn Drehimpuls}} + \underbrace{I\vec{\Omega}}_{\vec{M}\text{ : innerer Drehimpuls „Spin"}}$$

$$\vec{j} = B\vec{J} = M_{tot} \vec{r}_s \wedge \vec{v}_s + \vec{m} \quad : \text{totaler Drehimpuls im Labor System}$$

Unter Einfluss einer äußeren Kraft, ändert sich der Drehimpuls eines Körpers mit seinem Drehmoment: (bezüglich Punkt O des Körpers)

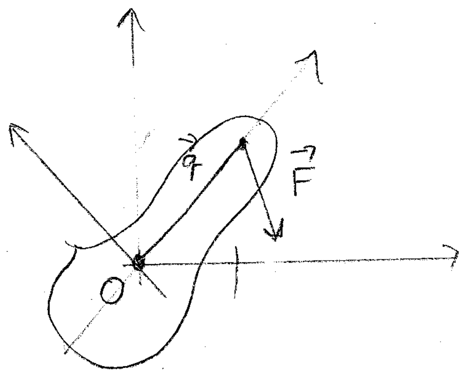
$$\frac{d}{dt}\vec{m} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{q}_i \wedge \dot{\vec{q}}_i$$

$$= \sum_i m_i \vec{q}_i \wedge \ddot{\vec{q}}_i = \underbrace{\sum_i m_i \vec{q}_i \wedge \vec{F}}_{\vec{n}}$$

$$= \vec{n} : \text{ Drehmoment}$$

relative zum Körper fixen Punkt O.

Dies bedeutet für das mitrotierende System



$$\frac{d}{dt}\vec{M} = \frac{d}{dt}B^{-1}\vec{m}$$

$$= + B^{-1}\vec{n} + \dot{B}^{-1}B\vec{M}$$

$$= \vec{N} + \vec{M}\wedge\vec{\Omega}$$

Zusammenfassend: Euler-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\vec{M} = \vec{M}\wedge\vec{\Omega} + \vec{N}$$

↳ Drehmoment

d.h., auch in Absenz von Kräften $\vec{N}=0$ ist der Drehimpuls im rotierenden System nicht erhalten.

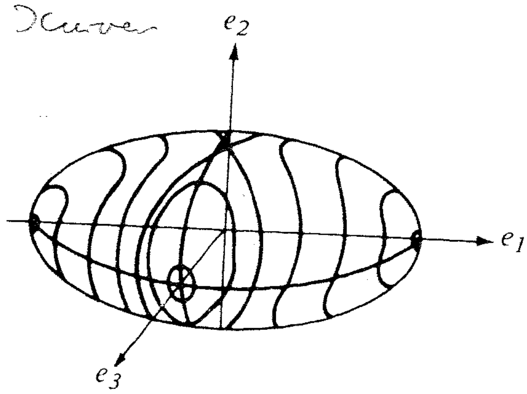
Die Lösung des freien Kreisel lässt sich einfach geometrisch interpretieren:

- Wir haben zwei Erhaltungsgrössen:

$$E = \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} = \text{const}$$

$$M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = \text{const}$$

Die Schnittmenge beschreibt Kurven auf einem Ellipsoiden

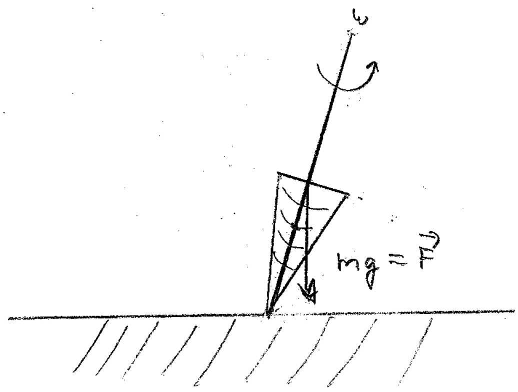


- 6 - Stationäre Lösungen entlang der Hauptachsen

- 4 stabile entlang $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_3$ $(I_1 < I_2 < I_3)$

  2 instabile entlang der mittleren Hauptachse.

6.3 Lagrange's top



Für einen Kreisel im Schwerfeld haben wir nur 2 Erhaltene Grössen:

Energie: $E = T + U$

Drehimpuls m_z entlang z-achse

Für einen symmetrischen Kreisel ist das Problem aber exakt lösbar. $(I_1 = I_2 \neq I_3)$

Ein geeignetes Koordinaten System sind die Euler-Winkel: φ, ψ, ϑ

$0 < \varphi < 2\pi$

$0 < \psi < 2\pi$

$0 < \vartheta < \pi$

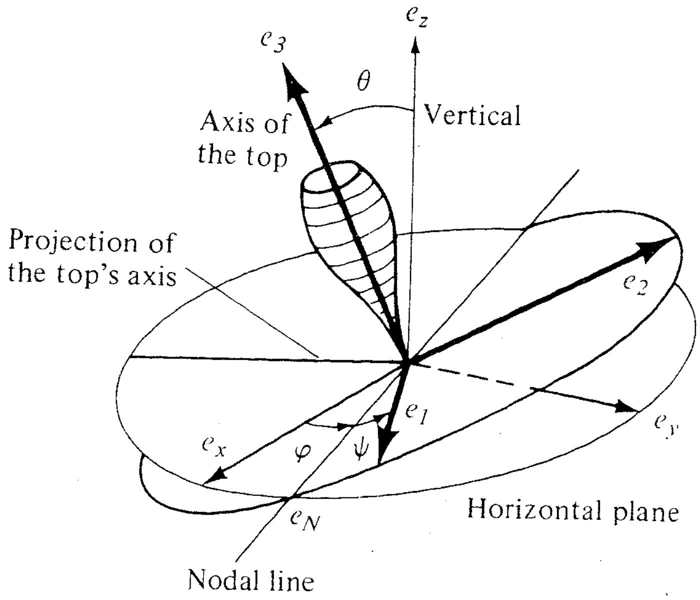


Figure 126 Euler angles

- Das Laborsystem K ist gegeben durch

  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

- Das körperfeste System K' ist fixiert entlang der Hauptträgheitsmomenten

  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

- $\vec{e}_N = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_3$: Knotenlinie

Um K in K' zu transformieren benötigen wir 3 rotationen

- Winkel φ um $\vec{e}_z$: $\vec{e}_x \to \vec{e}_N$
- Winkel ϑ um $\vec{e}_N$: $\vec{e}_z \to \vec{e}_3$
- Winkel ψ um $\vec{e}_3$: $\vec{e}_N \to \vec{e}_1$

Weiter gilt:

$$\vec{e}_N = \cos\psi\, \vec{e}_1 - \sin\psi\, \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_z = \cos\vartheta\, \vec{e}_3 + \cos\psi \sin\vartheta\, \vec{e}_2 + \sin\psi \sin\vartheta\, \vec{e}_1$$

Wir haben jetzt ein geeignetes Koordinatensystem gefunden, als nächsten Schritt müssen wir die Lagrange Funktion in diesen Koordinaten ausdrücken

Potentielle Energie:

$$U = m g \cdot l \cos\vartheta$$

: l Position des Schwerpunktes.

Kin. Energie:

$$\underline{\vec{\Omega}} = \dot{\vartheta}\,\vec{e}_N + \dot{\psi}\,\vec{e}_3 + \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \equiv \Omega_1 \vec{e}_1 + \Omega_2 \vec{e}_2 + \Omega_3 \vec{e}_3$$

$$\begin{aligned} &= \vec{e}_1 \left(\dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta \right) \\ &+ \vec{e}_2 \left(-\dot{\vartheta}\sin\psi + \dot{\varphi}\cos\psi\sin\vartheta \right) \\ &+ \vec{e}_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta \right) \end{aligned}$$

d.h., im Bewegten System K' haben wir

$$\Omega_1 = \dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta$$

$$\Omega_2 = -\dot{\vartheta}\sin\psi + \dot{\varphi}\cos\psi\sin\vartheta$$

$$\Omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta$$

Einsetzen in die kin. Energie ergibt

$$T = \frac{1}{2}\left(I_1 \Omega_1^2 + \overset{I_1}{\overset{\shortparallel}{I_2}} \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2\right)$$

$$= \frac{I_1}{2}\left(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\vartheta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta\right)^2$$

Die Lagrangefunktion hat somit die Form

$$L(\varphi, \vartheta, \psi, \dot\varphi, \dot\vartheta, \dot\psi) = T - U$$

$$= \frac{I_1}{2}\left(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\vartheta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta\right)^2 - mgl\cos\vartheta$$

Es existieren 2 zyklische Koordinaten: ψ, φ

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \dot\varphi\left(I_1 \sin^2\vartheta + I_3\cos^2\vartheta\right) + \dot\psi I_3 \cos\vartheta = M_z \overset{!}{=} \text{const}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = \dot\varphi I_3 \cos\vartheta + \dot\psi I_3 = M_3 = \text{const}$$

$$\Rightarrow \dot\varphi = \frac{M_z - M_3\cos\vartheta}{I_1 \sin^2\vartheta}$$

$$\dot\psi = \frac{M_3}{I_3} - \cos\vartheta\,\frac{M_z - M_3\cos\vartheta}{I_1\sin^2\vartheta}$$

Die verbleibende Gleichung für die Inklination ϑ folgt aus der Energieerhaltung: (Einsetzen von $\dot\varphi$ und $\dot\psi$)

$$\underbrace{E - \frac{M_3^2}{2I_3}}_{E'} = \frac{I_1}{2}\dot\vartheta^2 + \underbrace{\frac{(M_z - M_3\cos\vartheta)^2}{2I_1\sin^2\vartheta} + mgl\cos\vartheta}_{U_{eff}(\vartheta)}$$

Somit haben wir nur noch ein 1-d Problem, dass wir formal exakt lösen können.

Eine qualitative Diskussion kann geführt werden durch einführen einer neuen Koordinate

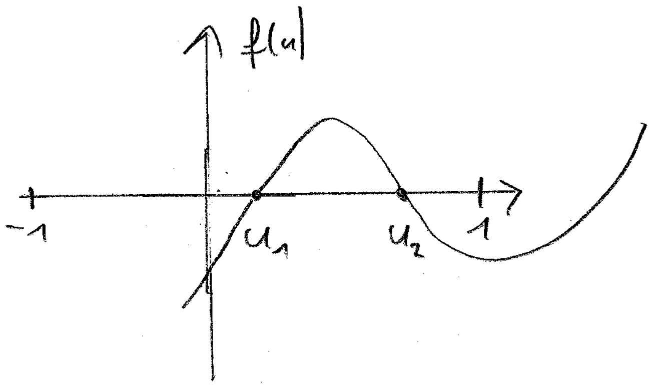
$$u = \cos\vartheta \qquad -1 \leq u \leq 1$$

$$a \equiv \frac{M_z}{I_1} \qquad b \equiv \frac{M_3}{I_1} \qquad \alpha \equiv \frac{2E'}{I_1} \qquad \beta = \frac{2mgl}{I_1} > 0$$

Somit gilt

$$\dot u^2 = f(u) = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (a - bu)^2$$: Polynom 3 Ordnung in u

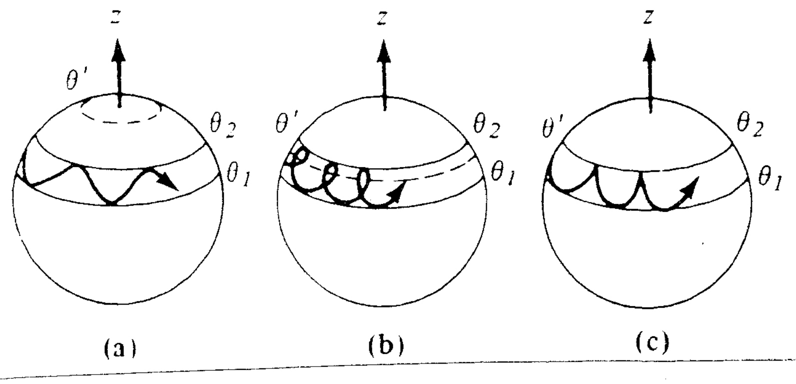
$$\dot\varphi = \frac{a - bu}{1-u^2}$$



- Die Bewegung findet zwischen den Lösungen u_1 und u_2 statt

Die inklination oszilliert somit zwischen zwei Werten ϑ_1 und ϑ_2 periodisch.

$$\cos\vartheta_1 = u_1 \qquad \cos\vartheta_2 = u_2$$



Diese Bewegung wird Nutation genannt

Der azimutale Winkel φ folgt aus

$$\dot\varphi = \frac{a-bu}{1-u^2}$$

Falls $a = bu$ ausserhalb von (u_1, u_2) liegt, steigt φ monoton an $\longrightarrow$ Fig (a)

Falls der Wert $\frac{a}{b}$ im Intervall (u_1, u_2) liegt, kehrt $\dot\varphi$ das Vorzeichen, φ bewegt sich vor und zurück $\longrightarrow$ Fig (b)

Fig (c) folgt wenn wir den Kreisel mit $\dot\varphi = 0$ fallen lassen.

Die azimutale Bewegung wir Prezession genannt.