Theoretische Physik I: Mechanik, Übung 2

Prof. Hans Peter Büchler WS 2010, 26. Oktober 2010

1. Ein-dimensionale Bewegung (Schriftlich)

Untersuche die 1-dimensionale Bewegung eines Teilchens mit der Koordinate x im Potential

$$V(x) = 3x^2 - 2x^3. \tag{1}$$

(a) Schreibe die Bewegungsgleichung hin und finde die stationären Lösungen. Zeige, dass die Stationären Lösungen mit den Extrema des Potentials überreinstimmen.

(b) Entwickle das Potential um die beiden Extrema in eine Taylor Reihe 2. Ordnung in x. Löse die Approximativen Bewegungsgleichungen nun exakt. Welcher Punkt ist eine stabile stationäre Lösung und welcher Punkt ist instabil.

(c) Skizziere die Bewegungs Trajektorien in der (x, p)-Ebene, d.h., die eine Achse stellt die Koordinate x dar und die zweite den Impuls $p = m\dot{x}$. Benutze die exakte Lösung von (b) um die Trajektorien um die Extrema möglichst genau zu zeichnen.

2. Hypotetische Kraft (Schriftlich)

Es sein ein hypothetisches fundamentales Kraftgeset für eine 2 Körperkraft im Vakuum gegeben durch

$$\mathbf{F}_{12} = -(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\, f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \tag{2}$$

Ist dieses Gesetz kompatible mit den Grundprinzipien der klassischen Mechanik? Überprüfe 'actio=reactio', Galilei Invarianz unter den 10 kontinuierlichen Transformationen und den 2 diskreten Transformationen. Gelten ebenfalls die 10 klassischen Erhaltungsgrössen?

3. Ein-dimensionale Bewegung II (Übungsstunde)

(a) Die Energie eines 1 dimensionalen Teilchens im Potential $V(x)$ ist gegeben als

$$E = H(x, p) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x). \tag{3}$$

Zeige durch Berechnen der Totalen Ableitung, d.h., $\frac{d}{dt}E$ und einsetzen der Bewegungsgleichung, dass die Energie erhalten ist.

(b) Zeige, dass daher die Bewegungsgleichung auch durch die Gleichung

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\,(E - V(x))} \tag{4}$$

bestimmt ist. Finde eine Formale Lösung zu dieser Bewegungsgleichung.

(c) Zeige, dass die Trajektorien in der (x, p)-Ebene gerade die Kurven sind, die zu einem festen Wert der Energy $E = H(x, p)$ gehören. Skizziere, daher die Lösungen für das Potential

$$V(x) = \cos(x). \tag{5}$$

(d)* Für eine Periodische Lösung sei die 'Wirkung' $S(E)$ definiert als die Fläche die von der Kurve mit Energie E in der (x, p)-Ebene eingeschlossen ist. Zeige, dass die Periode der Bewegung T geschrieben werden kann als

$$T = \frac{d}{dE} S(E). \tag{6}$$