Theoretische Physik I: Mechanik, Übung 5

Prof. Hans Peter Büchler WS 2010, 16 November 2010

1. Zum Noethertheorem (Übungsstunde)

(a) Für ein freies Teilchen hat die Lagrange Funktion die Form $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = m\dot{\mathbf{r}}^2/2$. Berechne, wie sich die Lagrange Funktion unter einem Galilei boost $\mathbf{r} \to \mathbf{r} + s\mathbf{v}t$ verändert. Zeige, dass sich der zusätzliche Term als eine totale Ableitung schreiben lässt.

(b) Eine Symmetrie des Systems ist dann gegeben, wenn die zugehörige Transformation die Variation der Wirkung invariant lässt, d.h., wenn sich die Lagrange Funktion nur um eine totale Ableitung unterscheidet.

$$L \to L' = L(q^i, \dot{q}^i) + \frac{\mathrm{d}F(q^i, \dot{q}^i, t)}{\mathrm{d}\,t}. \tag{1}$$

Daher ist auch der Galilei boost aus (a) ebenfalls eine Symmetrie des Systems. Das Noether Theorem ergibt dann die Erhaltungsgösse

$$I(q^i, \dot{q}^i) = \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{dh^i}{ds} - \frac{\partial F}{\partial s} \right]_{s=0} \tag{2}$$

Zeige, dass daher aus der Invarianz unter einem Galilei boost der Schwerpunktssatz folgt. Beweise auch diese Veralgemeinerung des Noether Theorems.

2. Zwei-Teilche Problem im Lagrange Formalismus (Schriftlich)

Löse das Zwei-Teilchen Problem vollständig mittels dem Lagrange Formalismus und der Benutzung des Nöthertheorems für die Erhaltungssätze.

3. Elektromagnetisches Feld (Schriftlich) Ein Teilchen mit der Masse m und der Ladung q bewegt sich im elektrischen und magnetischen Feld $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ unter der Lorentz Kraft

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e\frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B}. \tag{3}$$

Die Felder werden durch ein Vektorpotenzial $\mathbf{A}$ sowie ein skalares Potenzial ϕ beschrieben, $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}\mathbf{A}$ und $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

(a) Betrachte ein Teilchen in einem homogenen Magnetfeld entlang der z-Achse, d.h., $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Zeige, dass sich die Potentiale dazu schreiben lassen als

$$\phi = 0, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -yB \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Zeige, dass die Teilchen Trajektorie

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_c t) \\ \sin(\omega_c t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

mit der Zyklotron Frequenz $\omega_c = eB/mc$ eine Lösung der Bewegungsgleichung ist.

(b) Gib zur Lagrangefunktion mit dem geschwindigkeitsabhängigen Potenzial

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) - \mathbf{q}\phi(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \tag{6}$$

die Lagrangegleichungen an. Um welche Bewegungsgleichung handelt es sich? (*Hinweis: Bestimme die Langrangegleichungen komponentenweise, d.h. bestimme* $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$, es gilt: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_\mathbf{i} = \epsilon_{\mathbf{ijk}}\mathbf{a}_\mathbf{i}\mathbf{b}_\mathbf{k}$)

(c) Bestimme den kanonisch konjugierten Impuls. Wie unterscheidet sich dieser vom kinetischen Impuls $m\dot{\mathbf{r}}$?

(d) Für ein geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld, siehe (a), ist die Lagrange Funktion translations invariant in x Richtung, d.h., $\mathbf{r} \to \mathbf{r} + s\mathbf{e}_x$ ist eine Symmetrie. Berechne mittels Noether Theorem die Erhaltungsgrösse und überprüfe für die spezielle Trakjektorie in (a) das die Gösse wirklich erhalten ist.