Theoretische Physik II: Quanten Mechanik, Übung 12

Prof. Hans Peter Büchler SS 2011, 19. Juli 2011

1. Identische Teilen im Topf (Übungsstunde)

Zwei identische Teilchen sollen sich wechselwirkungsfrei in einem 1D Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden bewegen

$$V(q) = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < q_0 \,, \\ \infty & \text{für } |q| \geq q_0 \,. \end{cases}$$

Der Spinzustand des Zwei-Teilchen-Systems möge symmetrisch gegenüber Teilchenvertauschung sein. Die beiden Einzelspins seien parallel, die beiden Teilchen sollen also dieselbe magnetische Quantenzahl m_S haben.

a) Formuliere den Hamiltonian des Zwei-Teilchen-Systems. Zeige, dass die Energieeigenzustände in einen Orts- und einen Spinanteil separieren. Welche Symmetrie muss der Ortsanteil des Gesamtzustandes besitzen, wenn es sich bei den beiden Teilchen um Bosonen bzw. Fermionen handelt?

b) Berechne die möglichen Eigenzustände und Eigenenergien für Bosonen bzw. Fermionen.

c) Gebe die Grundzustandsenergie für zwei Bosonen bzw. zwei Fermionen an.

2. Eigenschaften des Permutationsoperators (Übungsstunde)

Wir betrachten ein System von zwei Teilchen in einer Raumdimension $x \in \mathbb{R}$. Der Operator, der im Produktraum $\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_B^{(1)} \otimes \mathcal{H}_B^{(2)}$ der Einteilchen-Bahnhilberträume $\mathcal{H}_B^{(1)}$, $\mathcal{H}_B^{(2)}$ der Vertauschung der Bahnzustände der beiden Teilchen zugeordnet ist, kann formal durch seine Wirkung im Basissystem der gemeinsamen Eigenzustände $|x_1 x_2\rangle = |x_1\rangle^{(1)} |x_2\rangle^{(2)}$ der Ortsoperatoren von Teilchen 1 und 2 gemäß

$$P_{(12)}^B |x_1 x_2\rangle := |x_2 x_1\rangle \,, \; \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \tag{1}$$

definiert werden. Der Operator $P_{(12)}^B$ wird als Permutationsoperator in $\mathcal{H}_B$ zur Permutation $p = (12)$ des Zweiteilchensystems bezeichnet. Zeige, dass für den Operator $P_{(12)} \equiv P_{(12)}^B$

a) $P_{(12)}^{-1} = P_{(12)}^{\dagger} = P_{(12)}$ gilt;

b) $P_{(12)}$ nur die Eigenwerte $c_{(12)} = +1, -1$ besitzen kann;

c) die Vektoren

$$
\begin{aligned}
|xx\rangle_S &:= |xx\rangle\,, \\
|x_1x_2\rangle_S &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_1x_2\rangle + |x_2x_1\rangle\right)\,,\ x_1 < x_2 \\
|x_1x_2\rangle_A &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_1x_2\rangle - |x_2x_1\rangle\right)\,,\ x_1 < x_2
\end{aligned}
$$

Eigenvektoren von $P_{(12)}$ sind.