Theoretische Physik II: Quanten Mechanik, Übung 2

Prof. Hans Peter Büchler SS 2011, 03. Mai 2011

1. **Ebene Wellen (Schriftlich)**
Ebene Wellen im Intervall $[0,\, L]$ mit periodischen Randbedingungen sind gegeben durch
$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\, p_n\, x\right) \qquad \text{mit} \qquad p_n = \frac{2\pi\hbar n}{L}\,. \tag{1}$$
Zeige, dass dies ein vollständiges Set von orthonormierten Basisfunktionen darstellt. Zeige hierzu die Gültigkeit der folgenden Relationen
$$\int_0^L dx\ [\psi_n(x)]^* \,\psi_m(x) = \delta_{n,m} \qquad : \text{Orthogonalität} \tag{2}$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [\psi_n(x)]^* \,\psi_n(x') = \delta(x-x') : \text{Vollständigkeit.} \tag{3}$$
Im Limes $L \to \infty$ nehmen die Orthogonalität und die Vollständigkeit folgende Form an
$$\int dx\, \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\,(p-p')\; x\right] = 2\pi\hbar\; \delta(p-p') : \text{Orthogonalität} \tag{4}$$
$$\int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\,(x-x')\; p\right] = \qquad \delta(x-x') : \text{Vollständigkeit.} \tag{5}$$
Führe den Limes $L \to \infty$ explizit durch für ψ_n mit einem geeigneten Vorfaktor und zeige die Vollständigkeit und Orthogonalität. (Die Basisfunktionen sind nicht mehr normierbar und werden daher als verallgemeinertes Set von Basisfunktionen bezeichnet.)

2. **Freier Propagator (Übungsstunde)**
Der Propagator $K(x, x', t)$ zum Hamilton Operator H ist definiert durch die Lösung der Schrödinger Gleichung
$$[i\hbar\partial_t - H(p, x)]\; K(x, x', t) = 0 \tag{6}$$
mit der Anfangsbedingung $K(x, x', 0) = \delta(x - x')$. Zeige, dass für eine beliebige Anfangsbedingung $\psi_0(x)$ bei $t = 0$ die Lösung der Schrödinger Gleichung gegeben ist durch
$$\psi(x,t) \;=\; \int dx'\, K(x, x', t)\;\; \psi_0(x')\;. \tag{7}$$
Beweise mittels Fourier Transformation (Entwicklung in ebene Wellen), dass der Propagator des freien Teilchens mit $H = p^2/2m$ gegeben ist durch
$$K(x, x', t) \;=\; \left(\frac{m}{2\pi\, i\, t}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{im\,(x-x')^2}{2\hbar\, t}\right]\;. \tag{8}$$