Theoretische Physik II: Quanten Mechanik, Übung 3

Prof. Hans Peter Büchler SS 2011, 10. Mai 2011

1. Doppelspalt und Unschärferelation (Schriftlich)

Wir betrachten einen Doppelspaltversuch. Elektronen mit dem Impuls p_0 bewegen sich senkrecht auf den Schirm mit den Spalten (Spaltabstand a) zu und ergeben ein Interferenzmuster auf einem zweiten Schirm im Abstand d. Die Bahn der Elektronen vom Spalt zum Auftreffpunkt auf dem Schirm schliesst mit der Normalen des Schirms den Winkel ϕ_i , $i = 1, 2$, ein.

a) Berechne die Lage der Maxima des Interferenzmusters. Verwende hierzu

$$P(b,a) = |K(b,a)|^2 = |\Phi_1(x_1) + \Phi_2(x_2)|^2 \tag{1}$$

wobei $K(b,a)$ den Propagator darstellt, x_1, x_2 die beiden verschiedenen Wege und die Phasen Φ_i durch

$$\Phi_i \propto \exp\left[\frac{i}{\hbar}S[x(t)]\right] \;,\; S = \int dt\, L = \int dt\, \frac{m}{2}\,(\partial_t\, x)^2 \tag{2}$$

gegeben sind. Weiterhin werden die Winkel ϕ_i als klein und nahezu gleich angenommen. Hinweis: Der Impuls wird als konstant angenommen, somit gilt dann für die Zeit $t = x\, m/p$.

b) Wir gehen von einer klassischen Teilchenvorstellung aus, nach der die Elektronen einem Impulsübertrag von den Spalten bekommen. Bei elastischen Streuungen lässt sich der Impulsübertrag über

$$p_i = -p_0 \sin\phi_i \tag{3}$$

mit dem Winkel ϕ_i in Verbindung bringen. Da wir messen wollen, aus welchem Spalt das Elektron kommt, müssen wir die Näherung gleicher Winkel hier fallen lassen. Diesen Impulsübertrag messen wir nun, indem wir die Ränder der Spalte entsprechende Messgeräte anbringen. Dabei müssen wir beachten, dass das Messgerät ebenfalls Quantenmechanik unterliegt, also eine Orts- und Impulsunschärfe besitzt. Um die Winkel genau auflösen zu können, muss die Bedingung $\Delta p \ll |p_2 - p_1|$ gelten. Für das Messgerät bekommen wir somit die Relation $\Delta p\, \Delta x \geq h$.
Bestimme Δx in Abhängigkeit von a, d und dem Impuls p_0 der Elektronen.

c) Vergleiche das Ergebnis mit dem Streifenabstand des Interferenzmusters aus Teilaufgabe a).

2. Kommutatoren (Übungsstunde)

a) Zeige die Identität $[AB, C] = A\,[B, C] + [A, C]\,B$.

b) Berechne $[x, p^2]$, $[x^2, p^2]$ und $[xp, p^2]$.

c) Seien$g(x)$, $f(p)$ in eine Taylor-Reihe entwickelbar. Zeige, dass gilt
$[p, g(x)] = -i\hbar\,\frac{d}{dx}\,g(x)$ und $[x, f(p)] = i\hbar\,\frac{d}{dp}\,f(p)$.