Theoretische Physik II: Quanten Mechanik, Übung 4

Prof. Hans Peter Büchler SS 2011, 17. Mai 2011

1. **Baker-Campell-Hausdorff-Formel (Schriftlich)**
   Es seien zwei nichtkommutierende Operatoren A und B gegeben, für die sonst die Relationen $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$ gelten.

   (a) Zeige, dass für die Operatoren A und B die Gleichung

   $$\mathrm{e}^{-At} B \mathrm{e}^{At} = B - t[A,B] \tag{1}$$

   erfüllt ist, wobei t eine beliebige Zahl ist.

   (b) Zeige, dass die beiden Operatoren die Baker-Campell-Hausdorff-Formel

   $$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A} \mathrm{e}^{B} \mathrm{e}^{-[A,B]/2} \tag{2}$$

   erfüllen. (Tip: Leite für den Operator $W(t) = \mathrm{e}^{-tA}\mathrm{e}^{t(A+B)}$ eine differential Gleichung 1. Ordnung her und löse diese.)

2. **Heisenberg'sche Unschärferelation (Übungsstunde)**

(a) Gegeben seien zwei hermitsche Operatoren A und B. Beweise, dass diese Operatoren die Unschärferelation

$$(\Delta A)^2 \cdot (\Delta B)^2 \geq \frac{\langle \mathrm{i}\,[A,B]\rangle^2}{4} \tag{3}$$

erfüllt. Dabei ist $\langle A \rangle$ der Erwartungswert und $(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$ die Unschärfe von A in einem gegebenen Zustand.
(Tip: Berechne $|(\delta A + i\alpha\delta B)\Psi|^2$ mit $\delta A = A - \langle A \rangle$ ($\delta B = B - \langle B \rangle$) und benutze, dass das quadratische Polynom in α keine reele Nullstelle hat, d.h., $|(\delta A + i\alpha\delta B)\Psi|^2 \geq 0$)

(b) Zeige, nun unter Benutzung von (a), dass für Impuls- und Ortsoperator, p und x, die Heisenbergsche Unschärferelation

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \tag{4}$$

gilt.