Theoretische Physik II: Quanten Mechanik, Übung 6

Prof. Hans Peter Büchler SS 2011, 31. Mai 2011

1. Das δ-Potential (Schriftlich)

Wir betrachten die eindimensionale Bewegung eines Teilchen der Masse m in einem δ-Potential: $V(x) = -V_0\delta(x)$ mit $V_0 > 0$. Die Schrödingergleichung des Problems lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x) - V_0\delta(x)\phi(x) = E\phi(x). \tag{1}$$

Bestimme die normierten Eigenfunktionen der gebundenen Zustände. Wie viele gebundene Zustände gibt es in Abhängigkeit von V_0?

Die Lösung lässt sich finden mit dem richtigen Ansatz für die Wellenfunktion für $x > 0$ und $x < 0$, und den Randbedingungen: (i) die Wellenfunktion $\phi(x)$ ist stetig, und (ii) die Ableitung bei $x = 0$ hat einen Sprung (siehe Bemerkungen unten)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}[\phi'(\epsilon) - \phi'(-\epsilon)] - V_0\phi(0) = 0 \tag{2}$$

für $\epsilon \to 0$.

Bemerkung: Die Wellenfunktion $\phi(x)$ muss stetig sein, damit durch Ableiten keine höhere Singularitäten als δ-Funktionen entstehen. Um die Randbedingung bei $x = 0$ zu bekommen, integriert man die Schrödinger-Gleichung über ein kleines Intervall,

$$\lim_{\epsilon\to 0} -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\phi''(x)\mathrm{d}x - V_0\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(x)\phi(x)\mathrm{d}x = E\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\phi(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Für kleine $\epsilon \to 0$ folgt daraus die Gl. (2).

2. Kohärente Zustände Teil I (Schriftlich)

Für beliebige $\alpha \in \mathbb{C}$ definieren wir den kohärenten Zustand

$$|\psi_\alpha\rangle := \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|\psi_n\rangle\,. \tag{4}$$

a) Zeige, dass

$$|\psi_\alpha\rangle = \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger - \bar{\alpha}\hat{a}}|\psi_0\rangle\,, \tag{5}$$

wobei $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ die in der Vorlesung definierten Absteige- und Aufsteige-Operatoren sind.(Tip: $\mathrm{e}^{-\bar{\alpha}\hat{a}}|\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle$)

b) Zeige, dass kohärente Zustände nicht orthogonal sind und stattdessen

$$\langle\psi_\alpha|\psi_\beta\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2-2\bar{\alpha}\beta\right)}, \tag{6}$$

gilt.

3. Kohärente Zustände Teil II (Übungsstunde)

a) Berechne $\langle x \rangle_\alpha \equiv \langle \psi_\alpha | \, \hat{x} \, | \psi_\alpha \rangle$, $\langle p \rangle_\alpha$, Δx_α, Δp_α und zeige, dass für alle $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\Delta x_\alpha \Delta p_\alpha = \frac{\hbar}{2}, \tag{7}$$

gilt, d.h. dass kohärente Zustände die Unschärfe minimieren.
(Tip: $\hat{a}\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha$)

b) Berechne die Wellenfunktionen

$$\psi_\alpha(x) = \langle x | \psi_\alpha \rangle \,, \tag{8}$$
$$\varphi_\alpha(p) = \langle p | \psi_\alpha \rangle \,, \tag{9}$$

die zum kohärenten Zustand ψ_α, in der Orts- bzw. in der Impuls-Darstellung, gehören. Zeige, dass

$$|\psi_\alpha(x)|^2 = \left| \tilde{\psi}_0(x - \langle x \rangle_\alpha) \right|^2 , \tag{10}$$
$$|\varphi_\alpha(p)|^2 = |\tilde{\varphi}_0(p - \langle p \rangle_\alpha)|^2 \,, \tag{11}$$

wobei $\tilde{\psi}_0$ und $\tilde{\varphi}_0$ die Wellenfunktionen des Grundzustandes, im Orts- bzw. im Impulsraum sind

$$\tilde{\psi}_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}, \tag{12}$$
$$\tilde{\varphi}_0 = \left(\frac{1}{\pi\hbar m\omega} \right)^{1/4} \mathrm{e}^{-\frac{1}{m\omega\hbar}p^2}. \tag{13}$$

(Tip: $\xi = \sqrt{\frac{\omega m}{\hbar}} x$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$)