Theoretische Physik II: Quanten Mechanik, Übung 9

Prof. Hans Peter Büchler SS 2011, 28. Juni 2011

1. Dichtematrix (Schriftlich)

(a) Ein Strahl von Spin-1-Teilchen falle auf die modifizierten Stern-Gerlach-Apparate (α) und (β). Der Spinzustand des Strahls sei dabei gegeben durch die Dichtematrix $\rho_0 = \frac{1}{3}\mathbb{1}$. Wie lautet der Dichteoperator ρ_α bzw. ρ_β für den Strahl, nachdem er den Apparat (α) bzw. (β) passiert hat? Zeige, dass für die Dichteoperatoren $\mathrm{Tr}\,\rho_{\alpha/\beta} = 1$ sowie $\mathrm{Tr}\,\rho^2_{\alpha/\beta} \leq 1$ gilt. Wodurch unterscheidet sich die Situation $\mathrm{Tr}\,\rho^2_{\alpha/\beta} = 1$ von der mit $\mathrm{Tr}\,\rho^2_{\alpha/\beta} < 1$?
Tipp: Normierungen beachten!

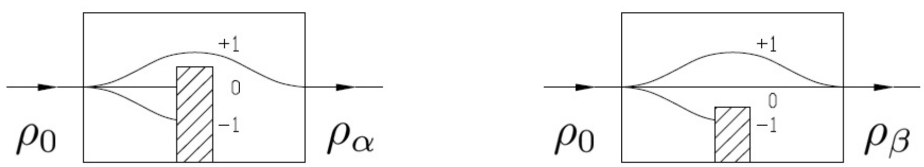

Abbildung 1: Stern-Gerlach-Apparate (α) und (β)

(b) Wir betrachten einen Strahl von Spin-1/2-Teilchen, deren Zustand durch den Dichteoperator

$$\rho_0 = |+\rangle \frac{1}{4} \langle +| + |-\rangle \frac{3}{4} \langle -| \tag{1}$$

gegeben ist. Dieser falle auf den Stern-Gerlach-Apparat (γ). Wie lautet der Dichteoperator ρ_γ für den Strahl, nachdem er den Apparat durchlaufen hat? Liegt nach dem Apparat eine reine Gesamtheit vor?

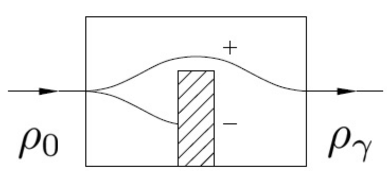

Abbildung 2: Stern-Gerlach-Apparat (γ)

(c) Konstruiere eine Dichtematrix für einen vollständig in positiver x-Richtung polarisierten Spin-1/2-Strahl in der Basis $\{|s_z, +\rangle, |s_z, -\rangle\}$. Wie gross ist der Erwartungswert für die Polarisation in y-Richtung des Spins?

(d) Konstruiere eine Dichtematrix für ein Gemisch für einen Spin-1/2-Strahl aus einem 3/4 in positiver z-Richtung polarisierten Anteil und einem 1/4 in positiver x-Richtung polarisierten Anteil in der Basis $\{|s_z, +\rangle, |s_z, -\rangle\}$. Berechne die Erwartungswerte für s_x, s_y und s_z.

2. Harmonischer Oszillator im Heisenbergbild (Übungsstunde)

Die Operatoren im Heisenbergbild sind mit denen im Schrödingerbild durch die Relation

$$A_H(t) = U^{-1}(t) A_S U(t), \qquad U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \tag{2}$$

verknüpft. $U(t)$ stellt dabei den Zeitentwicklungsoperator dar, der die *Schrödingergleichung* $i\hbar\partial_t U(t) = HU(t)$ erfüllt. Weiterhin definieren wir die (zeitunabhängigen) Zustände im Heisenbergbild als $|\psi_H\rangle := |\psi_S(t=0)\rangle$. Die Indizes H stehen hierbei für *Heisenberg*, die Indizes S für *Schrödinger*. In diesem Zusammenhang sollen die Operatoren $A_H(t)$ und A_S beliebige Operatoren im Schrödinger- und Heisenbergbild darstellen.

(a) Leite über Gl. (2) die Heisenberg'sche Bewegungsgleichung für Operatoren,

$$\partial_t A_H(t) = \frac{i}{\hbar}[H, A_H(t)], \tag{3}$$

her.

(b) Wir betrachten nun den Hamiltonian für den harmonischen Oszillator

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} Q^2 = \hbar\omega \left(a_S^\dagger a_S + \frac{1}{2} \right), \qquad [a_S, a_S^\dagger] = 1. \tag{4}$$

Zeige

$$a_H(t) = e^{i\omega t} a_S, \qquad a_H^\dagger(t) = e^{-i\omega t} a_S^\dagger. \tag{5}$$

Hier stellen die Operatoren a_S und $a_S^\dagger$ die gewohnten Ab- und Aufsteige-Operatoren des harmonischen Oszillators im Schrödingerbild dar.
Tipp: BCH.

(c) Bestimme damit die Relationen

$$Q_H(t) = Q_H(t; P_S, Q_S), \qquad P_H(t) = P_H(t; P_S, Q_S). \tag{6}$$

Tipp: $0 = e^{-i\omega t} a_S - e^{-i\omega t} a_S$ bzw. $0 = e^{i\omega t} a_S^\dagger - e^{i\omega t} a_S^\dagger$.

(d) Zeige, dass die Heisenberg'sche Bewegungsgleichung (3) auf die klassischen Hamiltongleichungen für die Operatoren $Q_H(t)$ und $P_H(t)$ für den harmonischen Oszillator führt.

(e) Wir definieren zur Zeit $t = 0$ den Zustand $|\psi_S(t=0)\rangle = |\psi_H\rangle = |1\rangle + |2\rangle =: |\gamma\rangle$ $(N|n\rangle = n|n\rangle)$. Berechne die Erwartungswerte

$$\langle Q_H(t)\rangle_\gamma = \langle\gamma|Q_H(t)|\gamma\rangle, \qquad \langle P_H(t)\rangle_\gamma = \langle\gamma|P_H(t)|\gamma\rangle, \tag{7}$$

für beliebige Zeiten t.