5. Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Differential gleichungen treten in der Physik sehr häufig auf

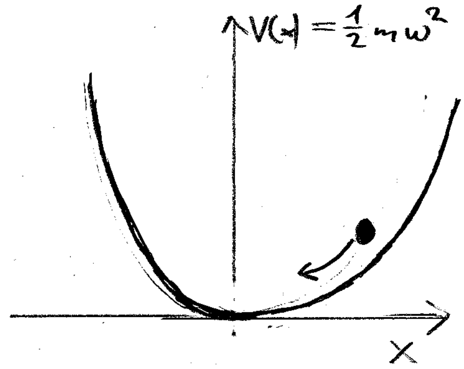
Bsp: • radioaktiver Zerfall: Die Anzahl Atome die in einem Zeitintervall Δt zerfallen ist proportional zur Anzahl Teilchen und der Rate Γ.

$$\Delta N = - N(t)\, \Gamma \cdot \Delta t \qquad (5.1)$$

$$\underset{\Delta t \to 0}{\Longrightarrow} \quad \frac{dN(t)}{dt} = - \Gamma N(t)$$

Diese DG hat die Lösung $N(t) = N_0 e^{-\Gamma \cdot t}$ mit N_0 der Atom Zahl zur Zeit $t=0$.

• Harmonischer Oszillator:



$$m \ddot{x}(t) = F = - m w^2 x$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) + w^2 x = 0$$

Die DG hat die Lösung $x(t) = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}$.
Da $x(t)$ reell ist muss gelten $A^* = B = \frac{x_0}{2} e^{i\varphi}$ und die allgemeinste Lösung hat die Form

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

mit x_0 und φ bestimmt durch die Anfangs/Randbedingung.

5.1. Lineare Differentialgl. 1. Ordnung

Lineare DG 1. Ordnung haben die Form

$$y' = a(x)\, y + b(x) \tag{5.3}$$

und benötigen im allg. eine Anfangsbedingung

$$y(0) = y_0 \tag{5.4}$$

um eine spezielle Lösung zu bestimmen.

Trivialer Fall: $a(x) = 0$ so ist die Lösung bestimmt durch das Integral von $b(x)$

$$y(x) = \int_0^x du\, b(u) + y_0 \tag{5.5}$$

Bsp: Geschwindigkeit eines Teilchens mit zeitabhängiger Kraft:

$$\dot{v} = \frac{F(t)}{m} \implies v = \int_0^t \frac{F(t)}{m}\, dt + v_0$$

Homogene DG: $b(x) = 0$ Die DG hat somit die Form

$$y' = a(x)\, y$$

(5.6)

Bem: Eine Eigenschaft von linearen homogenen Differentialgleichungen ist, dass für Lösungen y_1, y_2 auch folgende Funktion Lösungen sind:

- $\lambda y_1(x)$
- $y_1(x) + y_2(x)$

Die Lösung der DG finden wir mittels Division von y:

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx} \ln y = a(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \ln y(x) = \int_0^x dx\, a(x) + c \equiv A(x) + c \qquad (5.7)$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = y_0\, e^{\int_0^x dx\, a(x)} = y_0\, e^{A(x)}$$

Inhomogene DG: Zusätzlich zur homogenen Gl. haben wir jetzt noch einen Treiber $b(x)$

$$y' - a(x)\, y = b(x) \qquad (5.8)$$

Für zwei Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ gilt dass

$$y_1(x) - y_2(x)$$

eine Lösung der homogenen Gleichung ist.

Eine Lösung erhält man mittels multiplikation der DG mit $e^{-A(x)}$

$$\Rightarrow \quad e^{-A(x)} y' - \underbrace{a(x)\, e^{-A(x)}}_{(e^{-A(x)})'} y = b(x)\, e^{-A(x)}$$

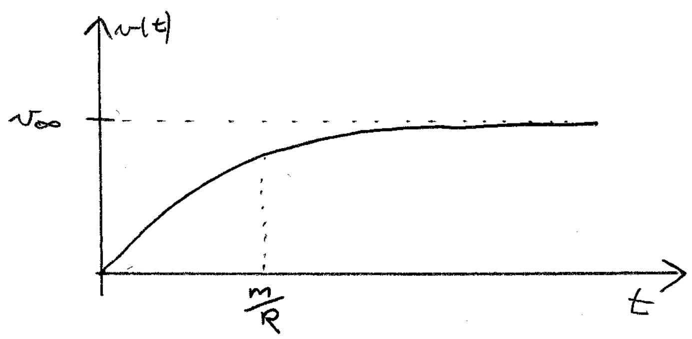
$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(y\, e^{-A(x)}\right) = b(x)\, e^{-A(x)}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \underbrace{e^{+A(x)} \int_0^x dx\, b(x)\, e^{-A(x)}}_{\text{particulär Lösung}} + \underbrace{y_0\, e^{A(x)}}_{\text{homogene Lösung}} \qquad (5.9)$$

Bsp: • Massepunkt mit konstante Beschleunigung aber linearer Luftwiderstand

$$m\dot{v} = \underset{\text{Beschleunigung}}{F} - \overbrace{R v}^{\text{Luftwiderstand}}$$

$$v = \frac{\overbrace{F}^{v_\infty}}{R}\left(1 - e^{-t\frac{R}{m}}\right) + v_0\, e^{-t\frac{R}{m}}$$



5.2 Nichtlineare DG 1. Ordnung

Die allgemeine Form ist

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) \qquad (5.10)$$

und ist i.A nicht geschlossen lösbar, ausser in Spezialfällen von denen wir ein paar untersuchen wollen.

Separierbar: Falls $F(x,y)$ separierbar ist, d.h,

$$F(x,y) = f(x)\, g(y) \qquad (5.11)$$

So können wir die DG umschreiben auf

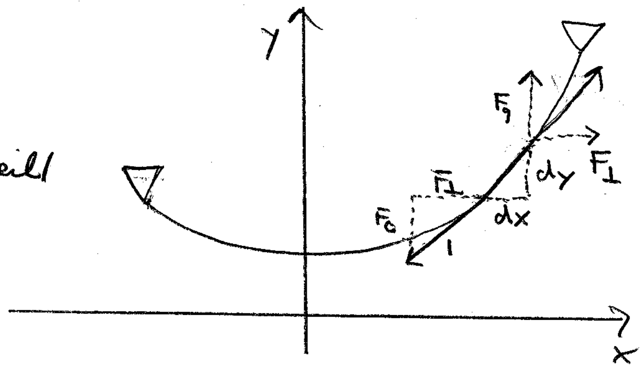
$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

$$\xRightarrow{\text{integrieren mit } x} \int dx \frac{y'}{g(y)} = \underbrace{\int dy \frac{1}{g(y)}}_{G(y)} = \underbrace{\int dx\, f(x)}_{H(x)} + c \qquad (5.12)$$

$$G(y) = H(x) + c$$

Falls $G(y)$ invertierbar ist, erhalten wir

$$y(x) = G^{-1}(H(x)+c)$$



Bsp: Kettengleichung: ~~Freihängendes Seil~~ Kette

$$y'' = \alpha\sqrt{1+(y')^2}$$

Setze $u = y'$ $\Longrightarrow$ $\frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} = \alpha$

$$\Longrightarrow \int du \, \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arcsinh} u = \alpha x + c_1$$

$$\Longrightarrow y' = u = \sinh(\alpha x + c_1)$$

$$\Longrightarrow y = \cosh(\alpha x + c_1) + \tilde{c}$$

Bernoulli-Gleichung: $y' = a(x)y + b(x)\,y^{\nu}$ (5.13)

Mit einer geschickten Substitution kann diese Gleichung auf eine inhomogene DG gebracht werden

$$\frac{y'}{y^{\nu}} = a(x)\,\underbrace{y^{1-\nu}}_{v} + b(x)$$

$$\frac{1}{1-\nu}\left(y^{1-\nu}\right)' = \frac{v'}{(1-\nu)}$$

Setze $y^{1-\nu} = v$ und man erhält

$$v' = (1-\nu)a(x)v + (1-\nu)\,b(x)$$

$\Longrightarrow$ Löse mit den Tricks von Gl. (5.9).

5.3. Lineare DG höherer Ordnung

Die allgemeine Form ist

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, y^{(i)}(x) = b(x) \qquad (5.14)$$

Die Lösung der DG ist eindeutig bestimmt durch das Anfangswert Problem

$$y(0) = y_0 \;,\; y^{(1)}(0) = y_0^{(1)}, \ldots \; y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \qquad (5.15)$$

<u>Bspi</u> Für eine DG 2 Ordnung

$$\underbrace{L}_{\text{induktion}} \ddot{I} + \underbrace{R}_{\text{Widerstand}} \dot{I} + \underbrace{\frac{1}{C}}_{\text{Kapacität}} I = \underbrace{\frac{dV}{dt}}_{\text{ext. Drive}}$$

: elektrischer Schwingkreis

ist durch Vorgabe von $I(0)$ und $\dot{I}(0)$ bestimmt.

allgemeiner Lösungsansatz:

- Find n unabhängige Lösungen $y_1(x) \ldots y_n(x)$ für die homogene Gleichung mit $b(x) = 0$.

$$\Longrightarrow \; y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \ldots c_n y_n(x)$$: Lösung der homogenen Gl

- Finde eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Gl. mit $b(x) \neq 0$.

- Die allg Lösung hat die Form $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ (5.16)

5.3.1. Konstante Koefficienten

Homogene Gl:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \qquad (5.17)$$

Mit dem Ansatz $y = e^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ können wir die DG in eine algebraische Gleichung umwandeln:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Diese Gleichung hat genau n Lösungen $\lambda_1 \ldots \lambda_n$. Es ist jetzt nötig 3 Fälle zu unterscheiden:

(i) alle λ_i sind reel und verschieden. Somit sind $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$ lin. unabhängig und Lösung hat die Form

$$y_c(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots c_n e^{\lambda_n x} \qquad (5.18)$$

(ii) Einige λ_i sind komplex. Falls a_i reel sind, so ist λ_i^* ebenfalls eine Lösung. So können wir schreiben $(\lambda_i = \alpha + i\beta)$

$$y_i(x) = c_i e^{(\alpha+i\beta)x} + c_i^* e^{(\alpha-\beta i)x}$$

$$= 2A e^{\alpha x} \cos(\beta x + \vartheta) \qquad (5.19)$$

(iii) Einige Lösungen sind mehrfache Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k \equiv \lambda$. Dann sieht man, dass die Funktionen

$$e^{\lambda x}, \; x e^{\lambda x}, \; x^2 e^{\lambda x}, \dots x^{k-1} e^{\lambda x}$$

ebenfalls Lösungen sind. Wir erhalten somit wieder n unabhängige Lösungen

$$y_c = (c_1 + c_2 x + \dots c_k x^{k-1}) e^{\lambda x} + c_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + \dots c_n e^{\lambda_n x} \tag{5.20}$$

<u>Bsp:</u> $y'' - 2y' + y = 0$ Ansatz $y = e^{\lambda x}$

$\Longrightarrow (\lambda^2 - 2\lambda + 1) e^{\lambda x} = 0$

$\Longrightarrow 0 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

$\Longrightarrow e^x, \; x e^x$ sind Lösungen

$\ulcorner \; \underbrace{(xe^x)''} - 2\underbrace{(xe^x)'} + xe^x =$

$= xe^x + 2e^x - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0 \lrcorner$

Die Lösung ist somit $y_c(x) = (c_1 + x c_2) e^x$

Inhomogene Gl.:

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 = b(x) \qquad (5.21)$$

Es gibt keine allg. Methode, die eine partikulär Lösung liefert. Für spezielle $b(x)$ helfen aber folgende Ansätze

(i) $b(x) = A e^{rx}$ $\qquad$ r reel oder komplex

Ansatz: $\qquad y_p(x) = B e^{rx}$

(ii) $b(x) = A_1 \sin rx + A_2 \cos rx$

Ansatz: $\qquad y_p(x) = B_1 \sin rx + B_2 \cos rx$

(5.22)

(iii) $b(x) = A_0 + A_1 x + \dots A_n x^n$

Ansatz: $\qquad y_p(x) = B_0 + B_1 x + \dots B_n x^n$

(iv) Falls $b(x)$ eine Summe oder Produkt von obigen Formen ist, so ist der Ansatz ebenfalls eine Summe und Produkt der entsprechenden Ansätze.

<u>Bsp:</u> $y'' + y = \cos 2x$

$\Rightarrow$ Ansatz: $y_p(x) = B_1 \cos 2x + B_2 \sin 2x$

$\Rightarrow -B_1 4 \cos 2x - B_2 4 \sin 2x + B_1 \cos 2x + B_2 \sin 2x = \cos 2x$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} -4B_1 + B_1 = 1 \\ -4B_2 + B_2 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} B_1 = -\frac{1}{3} \\ B_2 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $y_p(x) = -\frac{1}{3} \cos 2x$: partikulär Lösung

$y_c(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$: homogene Lösung

$\Rightarrow$ Vollständige Lösung:

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x) = -\frac{1}{3} \cos 2x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

<u>Bem:</u> Die allgemeine Lösung folgt aus der Summe der partikulär Lösung y_p und der Lösung der homogenen Gleichung y_c.

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x) \tag{5.23}$$

5.4. Green'sche Funktion

Betrachte die inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} y + a \frac{d}{dx} y + b y = f(x) \qquad (5.23)$$

für einen allgemeinen Treiber $f(x)$. Die Lösung des homogenen Problems kennen wir.

Frage: gibt es einen speziellen Treiber $h(x,z)$ so dass wir mit einer Lösung von

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x,z) + a \frac{d}{dx} G(x,z) + b\, G(x,z) = h(x,z) \qquad (5.24)$$

eine Lösung zur obigen Gleichung finden für beliebigen Treiber $f(x)$:

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\; G(x,z)\, f(z) \qquad (5.25)$$

Bem: Die Ansatz $y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, G(x,z)\, f(z)$ folgt aus der Linearität der DG.:

- $y(x)$ Lösung zum Treiber $f(x)$

  $\Longrightarrow$ $c\, y(x)$ ist Lösung zum Treiber $c f(x)$

- $y_1(x)$ Lösung zu $f(x)$ und $y_2(x)$ Lösung zu $g(x)$

  $\Longrightarrow$ $y_1(x) + y_2(x)$ ist Lösung zum Treiber $f(x) + g(x)$

Einsetzen von $y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, G(x,z)\, f(z)$ in die Differentialgleichung liefert

$$f(x) = \frac{d^2}{dx^2} y(x) + a \frac{d}{dx} y(x) + b\, y(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dz\, f(z) \underbrace{\left[\frac{d^2}{dx^2} G(x,z) + a \frac{d}{dx} G(x,z) + b\, G(x,y) \right]}_{h(x,z)} \qquad (5.26)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dz\, f(z)\, h(x,z)$$

d.h. der spezielle Treiber $h(x,z)$ muss die Eigenschaft haben

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz\, f(z)\, h(x,z) = f(x) \qquad (5.27)$$

Die Funktion die diese Eigenschaft besitzt wird in der Physik als Dirac-Delta Funktion bezeichnet mit der Notation $h(x,z) \equiv \delta(x-z)$

und mathematisch gesehen eine Distribution oder uneigentliche Funktion. Als nächstes untersuchen wir diese Funktion im Detail.

5.4.1 Dirac δ-Funktion

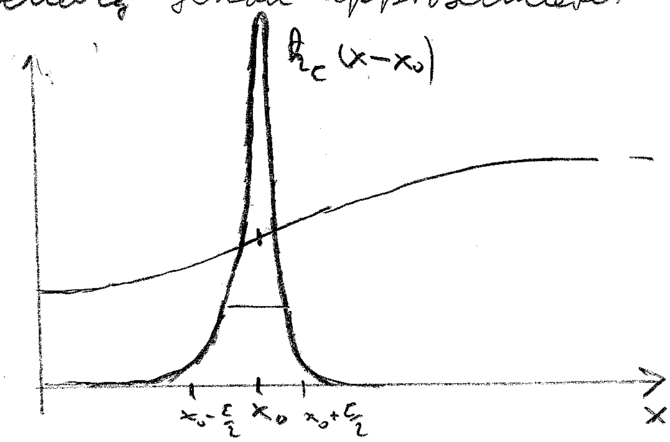
Die wichtigste Eigenschaft der δ-Funktion ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x-x_0)\, f(x) = f(x_0) \qquad (5.28)$$

für alle Funktionen $f(x)$ [$f(x)$ soll beliebig oft diff.bar sein].

Wir können die δ-Funktion beliebig genau approximieren mit der Funktion

$$h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}} \qquad (5.29)$$



Für kleine ε gilt somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, h_\varepsilon(x-x_0)\, f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ h_\varepsilon(x-x_0)\Big[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o(x-x_0)\Big]$$

Es gilt: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, h_\varepsilon(x-x_0)\, f(x_0) = f(x_0)\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\varepsilon}}$

$$\overset{z=\frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}}}{=} f(x_0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz\, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-z^2}}_{1} = f(x_0)$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \quad h_\varepsilon(x-x_0) \; f'(x_0) \; (x-x_0) \; -$$

$$\overset{z=x-x_0}{=} f'(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dz \; \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}} \, e^{-\frac{z^2}{\varepsilon}} \cdot z}_{\text{asymetrisch}} \quad = 0$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \quad h_\varepsilon(x-x_0) \, \frac{1}{2} \, f''(x_0) \; (x-x_0)$$

$$\overset{z=\frac{x-x_0}{\sqrt{\varepsilon}}}{=} \frac{1}{2} f''(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dz \; \varepsilon \, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \, z^2 \, e^{-z^2}$$

$$= \frac{1}{4} \; f''(x_0) \cdot \varepsilon \qquad \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \quad 0$$

Somit folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, h_\varepsilon(x-x_0) \, f(x) = f(x_0) + \frac{1}{4} f''(x_0) \, \varepsilon + o(\varepsilon^2)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \quad f(x_0) \tag{5.30}$$

Die Frage ist somit ob man das Integral mit dem limes verauschen kann

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \;\; \delta(x-x_0) \, f(x) = f(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; h_\varepsilon(x-x_0) \; f(x)$$

$$\text{„}\overset{⚠}{=}\text{"} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon(x-x_0) \; f(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \delta(x-x_0) \, \text{„}=\text{"} \lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon(x-x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\varepsilon}}$$

$$= \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \infty & x = x_0 \end{cases}$$

Wir sehen, dass die δ-Funktion keine eigentliche Funktion ist, sondern dass sie erst Sinn ergibt indem man über sie integriert. Trotzdem ist es möglich mit ihr als abstraktes Objekt zu rechnen.

Eigenschaften der δ-Funktion:

- $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) = 1$
- $\int_{-\eta}^{\eta} dx\, f(x)\,\delta(x) = f(0)$ für beliebige $\eta > 0$

$$\int_{-\eta}^{\eta} dx\, f(x)\,\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\eta}^{\eta} dx\, h_\varepsilon(x) f(x)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, h_\varepsilon(x) f(x)}_{f(0)} - \underbrace{\int_{-\infty}^{-\eta} h_\varepsilon(x) f(x)}_{= \int_{-\infty}^{-\eta} \lim_{\varepsilon\to 0} \underbrace{h_\varepsilon(x)}_{0} f(x) = 0} - \int_{\eta}^{\infty} h_\varepsilon(x) f(x)\Big]$$

$$= f(0)$$

- $\delta(x) = \delta(-x)$

$$\int dx\, \delta(x) f(x) = f(0) = \int dx\, \delta(x) f(-x)$$
$$= \int dx\, \delta(-x) f(x)$$

- $\delta(x)\cdot x = 0$

$$\int dx\, f(x)\, x\, \delta(x) = f(0)\cdot 0 = 0$$
$$= \int dx\, 0 \cdot f(x)$$

<u>Bsp:</u>

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\; f(x)\left[\delta(x-1)+\delta(x+1)\right] = f(1)+f(-1)$

- $\displaystyle\int_{a}^{b} dx\, f(x)\,\delta(x-c) = \begin{cases} f(c) & a<c<b \\ 0 & c<a \text{ oder } c>b \end{cases}$

- $\displaystyle\int_{-1}^{2} dx\; x^2\,\delta(x-1) = 1$

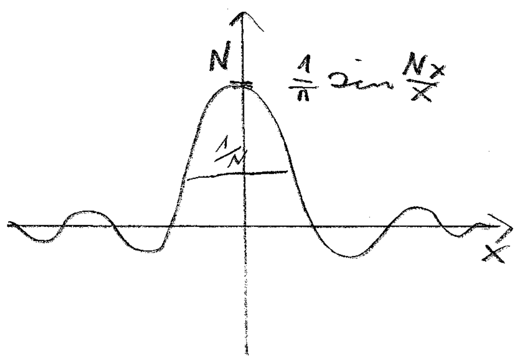
- $\displaystyle\int_{-1}^{2} dx\; x^2\,\delta(x+2) = 0$

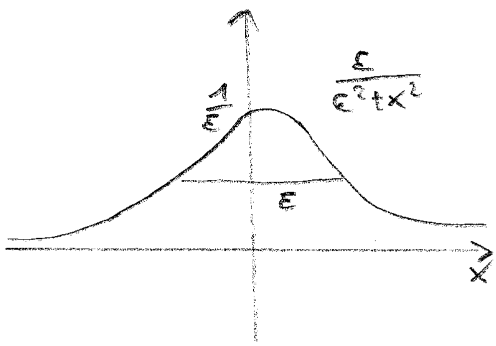
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-x}\,\delta(x-y^2) = e^{-y^2}$

alternative Funktionenfolgen, die gegen die δ-Funktion konvergieren:

- $\displaystyle\frac{1}{\pi}\,\sin\frac{Nx}{x}$ für $N\to\infty$

- $\displaystyle\frac{1}{\pi}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}$ für $\varepsilon\to 0$





Bem: Mathematisch ist die δ-Funktion eine Distribution:

- Mit $\mathcal{D}$ bezeichnen wir den Raum der Testfunktionen. Für $f \in \mathcal{D}$ gilt dass der Träger von f kompakt ist und $f \in C^\infty$ ist beliebig oft differenzierbar.

- Distributionen sind stetige lineare Funktionale auf dem Raum der Testfunktionen, d.h. die Distribution T ist eine Abbildung

$$T : f \in \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$.

Bsp: • Für eine Funktion $h(x)$ ist immer eine Distribution mittels

$$H(f) \equiv \int dx\, h(x) f(x)$$

- Die Abbildung

$$f(x) \longmapsto f(x_0)$$

ist gerade die δ-Funktion.

- Weitere Distributionen sind auch

$$f(x) \longmapsto f'(x_0)$$

oft als $\delta'(x-x_0)$ bezeichnet.

5.4.2. Greensche Funktion für den Oszillator

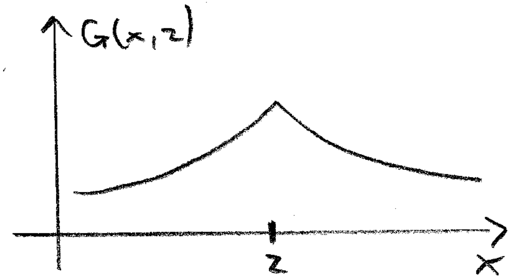
Die Differentialgleichung für die Greensche Funktion lautet

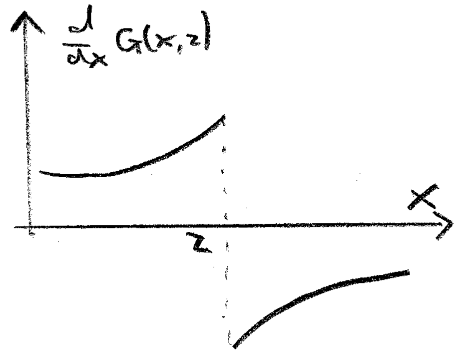
$$\frac{d^2}{dx^2}\, G(x,z) + a\, \frac{d}{dx}\, G(x,z) + b\, G(x,z) = \delta(x-z) \qquad (5.31)$$

Integrieren wir diese Gleichung um eine kleine Umgebung $\int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} dx$ so erhalten wir

$$\underbrace{\int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} dx\, \frac{d^2}{dx^2} G(x,z)}_{\frac{d}{dx} G(x,z)\Big|_{z+\varepsilon}^{z+\varepsilon}} + a \underbrace{\int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} dx\, \frac{d}{dx} G(x,z)}_{G(x,z)\Big|_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon}} + b \underbrace{\int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} dx\, G(x,z)}_{\cdot\, G(z,z)\cdot \varepsilon} = 1$$

Die Funktion $G(x,z)$ ist aber stetig bei $x = z$ und nur die Ableitung hat einen Sprung





Somit gilt für $\varepsilon \to 0$

$$\frac{d}{dx} G(x,z)\Big|_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} = G'(z+\varepsilon,z) - G'(z-\varepsilon,z) = 1 \qquad (5.34)$$

Da aber $\delta(x-z) = 0$ für $x \neq z$, gilt

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x,z) + a\frac{d}{dx} G(x,z) + bG(x,z) = 0 \qquad x \neq z \qquad (5.33)$$

und $G(x,z)$ kann konstruiert werden aus der Lösung der homogenen Gl. mit obigen Bedingungen für $x = z$.

<u>Bsp:</u> Green'sche Funktion zur DG für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x,z) + G(x,z) = \delta(x-z) \qquad G(0,z) = 0 \qquad G(\tfrac{\pi}{2},z) = 0$$

Ansatz: $G(x,z) = A(z)\sin x \qquad x < z$

$G(x,z) = B(z)\cos x \qquad x > z$

$\Rightarrow$ Stetigkeit: $A(z)\sin z - B(z)\cos z = 0$

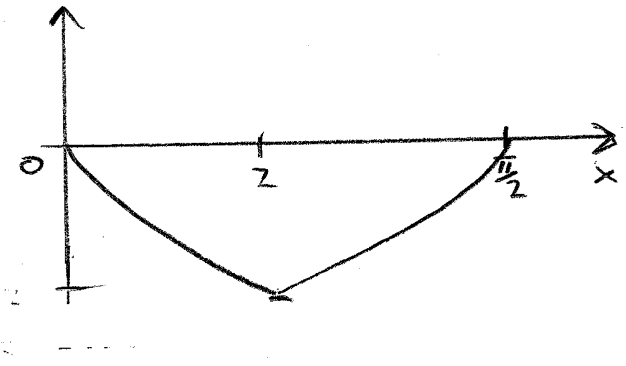
Sprung in Ableitung: $-A(z)\cos z + B(z)\sin z = -1$

$\Rightarrow A(z) = -\cos z$

$B(z) = -\sin z$

Die Green'sche Funktion hat die Form:

$$G(x,z) = \begin{cases} -\sin z \cos x & x \geq z \\ -\cos z \sin x & x \leq z \end{cases} \qquad (5.34)$$



Bsp: Finde eine partikulär Lösung zur DG auf dem Intervall $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$y''(x) + y'(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$\Rightarrow y(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz \, \frac{1}{\sin z} \, G(x,z)$$

$$= -\cos x \int_0^x dz \, \frac{\sin z}{\sin z} - \sin x \int_x^{\frac{\pi}{2}} dz \, \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$= -x \cos x + \sin x \ln \sin x$$