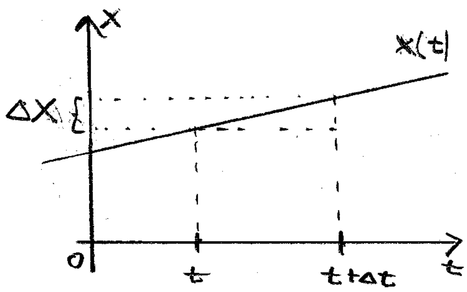
1. Differentialrechnung

Ableiten ist der Prozess indem bestimmt wird wie sich eine Funktion $f(x)$ ändert unter einer Variation seines Argumentes x.

Bsp: · Die Geschwindigkeit eines Massenpunktes:
Bei gleichförmiger Bewegung gilt

$$x(t) = v \cdot t + x_0$$



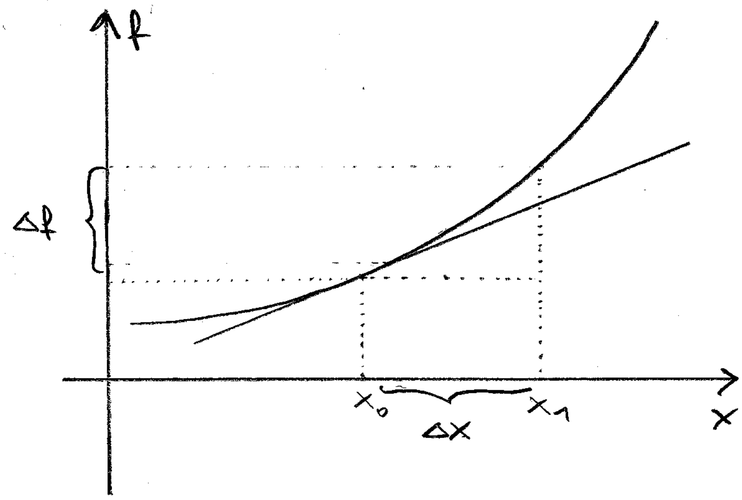
mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Die Ableitung bestimmt somit das Prinzip mit dem wir die Geschwindigkeit eines Massenpunktes auf beliebige Wege $x(t)$ verallgemeinern können.

Auf einem kleinem Bereich $\Delta x = x_1 - x_2$, ändert sich die Funktion $f(x)$ um den kleinen Wert

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$



Für kleine Δx beschreibt somit der Quotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

das Verhalten der Funktion $f(x)$ im Punkt x_0

Die formale Definition der Ableitung folgt mittels dem Grenzwert

$$\frac{d}{dx} f(x) \equiv f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1.1)$$

Eine Funktion $f(x)$ heisst differenzierbar, wenn dieser Grenzwert existiert. Da $f'(x)$ wieder Funktion der Variable x ist, können wir höhere Ableitungen bilden mittels

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \equiv f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x} \qquad (1.2)$$

Bsp: • $\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$

$\ulcorner \Delta f = (x+\Delta x)^n - x^n = \sum_k \binom{n}{k} x^{n-k} \Delta x^k - x^n$

$= \binom{n}{1} \Delta x \, x^{n-1} + o(\Delta x) \lrcorner$

• $\frac{d}{dx} e^{ax} = a e^{ax}$

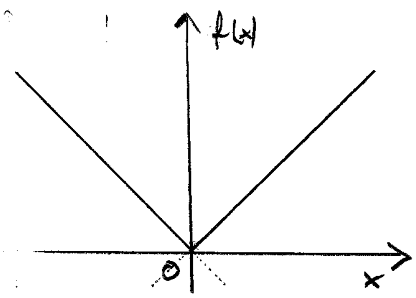
• $\frac{d}{dx} \ln ax = \frac{1}{x}$ (1.4)

• $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

• $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

• nicht differenzierbar in $x=0$:

$f(x) = |x|$



$$\frac{d}{dx}|x| = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

$\ulcorner \frac{d^2}{dx^2}|x| = 2\,\delta(x)$: Dirac δ-funktion $\lrcorner$

Die Ableitungen beschreiben das Verhalten um einen bestimmten Punkt. Daher können wir eine differenzierbare Funktion in einer kleinen Umgebung approximieren als Taylor Reihe

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right) \qquad (1.4)$$

<u>Vorsicht:</u> Die Approximation kann nicht immer beliebig genau gemacht werden durch Mitnahme höherer Terme.

Die erste Ableitung beschreibt die Steigung der Kurve, während die zweite Ableitung die Krümmung einer Kurve ergibt.

Bei der Bewegung $x(t)$ eines Massenpunktes, beschreibt die erste Ableitung die Geschwindigkeit,

$$v = \frac{d}{dt} x(t) \equiv \dot{x}(t)$$

während die zweite Ableitung die Beschleunigung ergibt

$$a = \frac{d^2}{dt^2} x(t) \equiv \ddot{x}(t) \qquad (1.5)$$

$\Longrightarrow$ Newtonsche Gesetz: $m\,\ddot{x}(t) = F(x,t)$

1.1. Differentiationsregeln

Die Ableitung ist eine lineare Operation, d.h,

$$\begin{aligned} \left(a \cdot f(x) \right)' &= a\, f'(x) \\ \left(f(x) + g(x) \right)' &= f'(x) + g'(x) \end{aligned} \qquad (1.6)$$

Produktregel: $\left(f(x) \cdot g(x) \right)' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$ $\qquad (1.7)$

$$\ulcorner \quad f(x+\Delta x)\, g(x+\Delta x) \simeq \left(f(x) + f'(x)\Delta x \right) \left(g(x) + g'(x)\Delta x \right)$$

$$\simeq f(x) \cdot g(x) + \Delta x \Big(\underbrace{f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)}_{\left(f(x)\, g(x) \right)'} \Big) + o(\Delta x^2) \quad \lrcorner$$

Kettenregel: Betrachte die Funktion $f(g(x))$. Für die Ableitung erhalten wir

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \left(\frac{d}{dg} f(g) \right) \frac{d}{dx} g(x) \qquad (1.8)$$

$$\ulcorner \quad f(g(x+\Delta x)) \simeq f\big(g(x) + \underbrace{\Delta x\, g'(x)}_{\Delta g} \big) \simeq f(g(x)) + \underbrace{f'(g(x)) \cdot g'(x)}_{\left(f(g(x)) \right)'} \Delta x + o(\Delta x^2) \quad \lrcorner$$

Umkehrfunktion: $y = f(x) \implies x = f^{-1}(y)$

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}(x) \right)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y) \right)} \qquad (1.9)$$