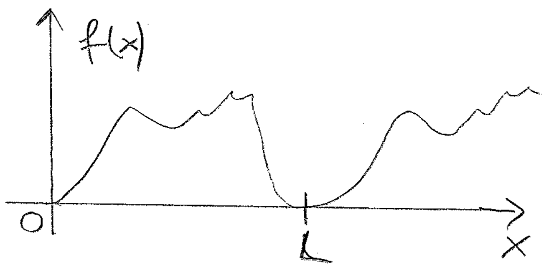
9 Fourierreihe und Fouriertransformation

9.1 Fourierreihe

Im folgenden sind wir an periodischen Funktion $f(x)$ interessiert mit Periode L, d.h.

$$f(x+L) = f(x)$$



Insbesondere dürfen die Funktionen auch komplexwertig sein, und sollen die Dirichlet Bedingung erfüllen

- $|f(x)|$ ist integrierbar
- $f(x)$ hat endlich viele Maxima und Minima
- $f(x)$ ist stückweise stetig ($f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2}\left[f(x+\varepsilon) + f(x-\varepsilon)\right]$)

Ein spezielles Set von solchen Funktionen sind

$$f_n(x) = e^{i k_n x} \qquad k_n = \frac{2\pi n}{L} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Insbesondere gilt

$$\frac{1}{L}\int_0^L dx \; f_n(x)\, f_m^*(x) = \frac{1}{L}\int_0^L dx \; e^{i\frac{2\pi}{L}x(n-m)} = \delta_{nm}$$

Die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x)$ sind definiert als

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{L}\int_0^L e^{-ik_nx} f(x) \cdot \equiv c_n$$

Die Fourierreihe hat dann die Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{ik_nx}$$

und es gilt, dass diese Reihe konvergiert und die Funktion identisch zu $f(x)$ ist, d.h. wir können $f(x)$ darstellen als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{ik_nx} \qquad k_n = \frac{2\pi n}{L}$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-ik_nx} f(x)$$

Somit können wir jede Funktion zerlegen in Elementare Schwingungen.

<u>Bem:</u> $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$ und somit haben wir die Funktion in sin und cos zerlegt.

Bem: alternative Form der Fourierreihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{i k_n x} = \sum_{n=\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \cos k_n x + i \hat{f}(n) \sin k_n x$$

$$= \underbrace{\hat{f}(0)}_{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)\right)}_{a_n} \cos k_n x + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(i\hat{f}(n) - i\hat{f}(-n)\right)}_{b_n} \sin k_n x$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k_n x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin k_n x$$

mit $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \cos k_n x\, f(x)$ $\qquad k_n = \frac{2\pi n}{L}$

$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin k_n x\, f(x)$

Bem:
- Falls $f(x)$ reel ist, so gilt

$$\hat{f}(n) = \hat{f}^*(-n) \qquad (a_n, b_n \in \mathbb{R})$$

- Falls $f(x)$ symmetrisch ist, d.h. $f(x) = f(-x)$ so gilt

$$\hat{f}(n) = \hat{f}(-n) \qquad (b_n = 0)$$

- Falls $f(x)$ symmetrisch und reel so ist

$\hat{f}(n)$ symmetrisch und reel. $\quad (a_n \in \mathbb{R} \quad b_n = 0)$

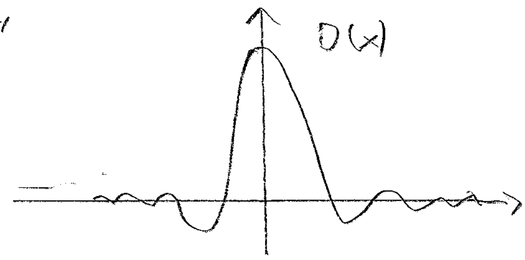
Die Idee des Beweises für den obigen Satz hat die Form

$$F_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\, e^{ik_n x} = \frac{1}{L}\int_0^L dy \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} e^{+ik_n(x-y)}}\, f(y)$$

$$D_N(x-y) \equiv \frac{1}{L}\,\frac{\sin\frac{2\pi(N+\frac{1}{2})(x-y)}{L}}{\sin\frac{\pi(x-y)}{L}} = e^{-iN\frac{2\pi}{L}(x-y)}\,\frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{L}(x-y)}\right)^{2N+1}}{1-e^{i\frac{2\pi}{L}(x-y)}}$$

$$= \int_0^L dy\; D_N(x-y)\, f(x)$$

Die Funktion $D_N(x)$ gleicht aber den Funktionen Reihen die gegen eine δ-Funktion konvergieren, d.h.,



$$\int_0^L dy\; D(x-y) = 1$$

Formal gilt daher

$$D_N(x-y) \xrightarrow[N\to\infty]{} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x-y+jL)$$

Daher gilt

$$F_N(x) \xrightarrow{N\to\infty} \int_0^L dy \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x-y+jL)\, f(y) = f(x)$$

<u>Bem:</u> Die Relation

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_n x} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x+jL)$$

wird oft verwendet in der Physik.

Bem: • Für die Fourierkoeffizienten gilt die Gleichung

$$\frac{1}{L}\int_0^L dx\, |f(x)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \quad \text{(Satz von Parseval)}$$

⌈

$$\frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x)\cdot f(x)^* = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f^*(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{ik_n x}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \left[\frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-ik_n x} f(x)\right]^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

Für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ folgt sofort

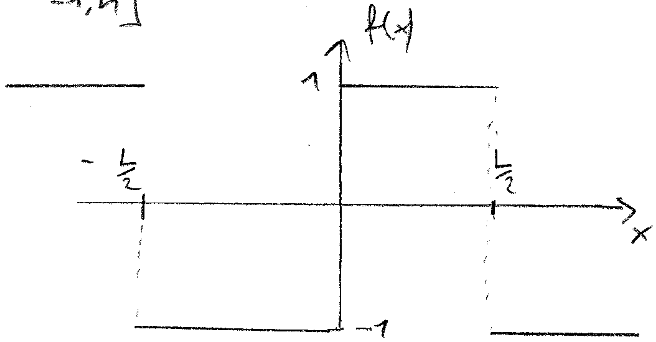
$$\frac{1}{L}\int_0^L dx\, f(x)\, g^*(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, \hat{g}^*(n)$$

• Für die Ableitung gilt $\widehat{\left[\partial_x f(x)\right]}(n) = i k_n \hat{f}(n)$, d.h.,

$$\partial_x f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i k_n\, e^{ik_n x} \hat{f}(n)$$

Bsp: $\cdot\ f(x) = \cos\frac{2\pi}{L}x = \frac{1}{2}\left[e^{ik_1x} + e^{-ik_1x}\right]$

$$\Rightarrow \hat{f}(n) = \frac{1}{2}\left[\delta_{1,n} + \delta_{-1,n}\right]$$



$\cdot\ f(x) = \Theta(x) \quad -\frac{L}{2} \le x < \frac{L}{2}$

$$\Rightarrow \hat{f}(n) = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x)\, e^{-ik_nx}$$

$$= \frac{1}{L}\left[\int_0^{\frac{L}{2}} e^{-ik_nx} - \int_{-\frac{L}{2}}^{0} e^{-ik_nx}\right]$$

$$= \frac{1}{L}\left[\frac{1}{-ik_n} e^{-ik_nx}\Big|_0^{\frac{L}{2}} - \frac{1}{-ik_n} e^{-ik_nx}\Big|_{-\frac{L}{2}}^{0}\right]$$

$$= \frac{1}{L}\frac{1}{-ik_n}\left[e^{-i\frac{2\pi}{L}n\cdot\frac{L}{2}} - 1 - 1 + e^{+i\frac{2\pi}{L}n\frac{L}{2}}\right]$$

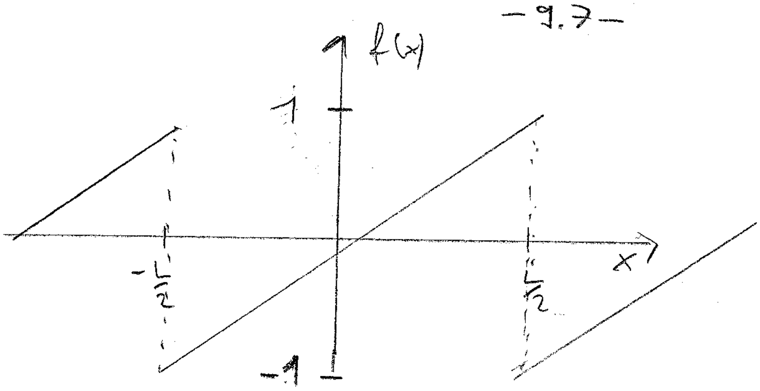
$$= \frac{1}{\pi i n}\left[-\cos n\pi + 1\right] = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{2}{\pi n i} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \frac{2}{\pi i}\left[e^{i2\pi(2n+1)x/L} - e^{-i2\pi(2n+1)\frac{x}{L}}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{4}{\pi} \sin 2\pi(2n+1)\frac{x}{L}$$

Mit dem Satz von Parseval folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$



- $f(x) = \frac{2x}{L} \qquad -\frac{L}{2} \le x < \frac{L}{2}$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \, \frac{2x}{L}\, e^{-ik_n x}$$

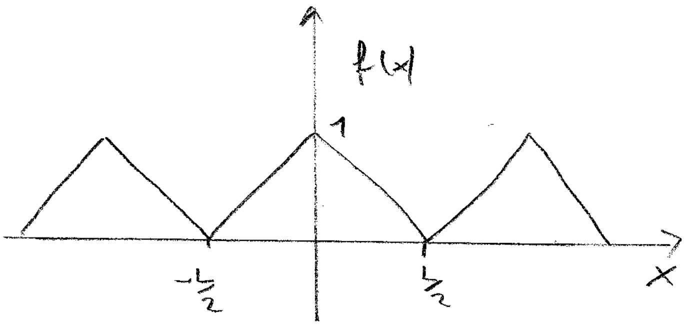
$$= \frac{2}{L^2}\left[x \frac{1}{-ik_n} e^{-ik_n x}\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} - \underbrace{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \frac{1}{-ik_n} e^{-ik_n x}}_{=0} \right]$$

$$= \frac{2}{L^2}\left[\frac{L}{2}\frac{e^{-ik_n\frac{L}{2}}}{-ik_n} + \frac{L}{2}\frac{e^{ik_n\frac{L}{2}}}{-ik_n}\right]$$

$$= \frac{1}{-i2\pi n}\, 2\cos\frac{2\pi}{L}n\frac{L}{2} = \frac{i}{\pi n}\cos\pi n = \begin{cases} \frac{i}{\pi n}(-1)^n & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{\pi n}(-1)^n e^{ik_n x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}(-1)^{n+1}\frac{e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}}{2i}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}(-1)^{n+1}\sin\frac{2\pi n x}{L}$$



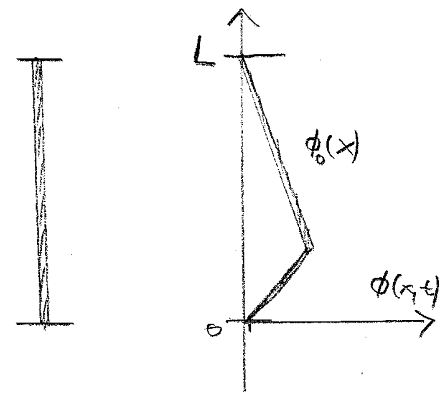
- $f(x) = 1 - \frac{2|x|}{L}$

$$\Longrightarrow \partial_x f(x) = -\frac{2}{L}\,\Theta(x) = -\frac{8}{\pi L}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin 2\pi(2n+1)\frac{x}{L}$$

$$\Longrightarrow f(x) \doteq a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{4}{\pi^2}\cos 2\pi(2n+1)\frac{x}{L}$$

$$\Longrightarrow \hat{f}(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{2}{L}\frac{2}{\pi k_n n} & n \text{ ungerade} \end{cases} = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{2}{\pi^2 n^2} & n \text{ ungerade} \\ [illegible] & n = 0 \end{cases}$$

Anwendung: Schwingende Saite eines Saiteninstrumentes.



- Durch anzupfen der Saite wird sie aus dem Gleichgewicht gebracht

$\Rightarrow$ Anfangsbedingung der Saite zur Zeit $t=0$

$$\phi(x,0) = \phi_0(x)$$
$$\partial_t \phi(x,0) = 0$$

- Die Bewegung der Saite folgt aus der Wellengleichung

$$\left[\partial_t^2 - \underbrace{c^2}_{\text{Schall Geschwindikeit}} \partial_x^2\right] \phi(x,t) = 0$$

- Wir lösen die Gleichung durch zerlegen in Fourierkomponenten:

$$\phi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(n,t)\, e^{ik_n x}$$

$$\Rightarrow \hat{\phi}(n,0) = \hat{\phi}_0(n) = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-ik_n x}\, \phi_0(x)$$

$$\Rightarrow \left[\partial_t^2 + c k_n^2\right] \hat{\phi}(n,t) = 0$$

: Harmonischer Oszillator für jede Mode n.

$$\Rightarrow \hat{\phi}(n,t) = \cos \underbrace{c \cdot k_n}_{\omega_n} t \cdot \hat{\phi}_0(n)$$

: Harmonische Schwingung mit Frequenz $\omega_n = \frac{2\pi c n}{L}$

$$\Rightarrow \phi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_0(n) \cos \omega_n t\, e^{ik_n x}$$

$\phi_0(x)$  : $\hat{\phi}_0(n) \sim \frac{1}{n^2}$: wenige Obertöne; dumpfer Klang

$\phi_0(x)$  : $\hat{\phi}_0(n) \sim \frac{1}{n}$: viele Obertöne; kräftiger Klang

9.2. Fouriertransformation

Für ein Funktion $f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $|f(x)|$ integrierbar, ist die Fouriertransformierte definiert als

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-ikx} f(x)$$

Somit ist $\hat{f}(k)$ wieder eine Funktion für $k \in \mathbb{R}$.

Bsp: $\cdot \; f(x) = e^{-a|x|}$

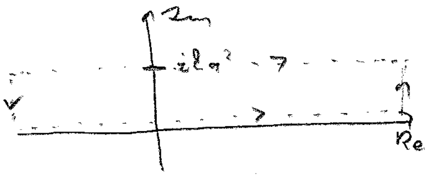
$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-ikx} e^{-a|x|} = \int_{0}^{\infty} dx \, e^{-(a+ik)x} + \int_{-\infty}^{0} dx \, e^{+(a-ik)x}$$

$$= \frac{1}{a+ik} + \frac{1}{a-ik} = \frac{2a}{a^2+k^2}$$

$\cdot \; f(x) = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-ikx} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-\frac{1}{2a^2}(x+ika^2)^2} \cdot e^{-\frac{a^2k^2}{2}}$$

$$= e^{-\frac{a^2k^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-\frac{(x+ika^2)^2}{2a^2}}}_{a\sqrt{2\pi}}$$



$$= a\sqrt{2\pi} \, e^{-\frac{a^2k^2}{2}}$$

In Analogie zu den Fourierreihen lässt sich $f(x)$ wieder darstellen als

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, \hat{f}(k)$$

Der Beweis folgt aus

$$\int \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, \hat{f}(k) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}k^2}\, e^{ikx}\, \hat{f}(k)$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int \frac{dk}{2\pi} \int dy\, e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}k^2}\, e^{ikx}\, e^{-iky}\, f(y)$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int dy\, f(y)\, \underbrace{\int \frac{dk}{2\pi}\, e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}k^2}\, e^{-ik(y-x)}}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon}\, e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int dy\, f(y)\, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon}\, e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}}}_{\xrightarrow{\varepsilon \to 0}\ \delta(x-y)}$$: Konvergiert gegen eine δ-Funktion

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, \delta(y-x) = f(x)$$

Es gilt daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ik(x-y)} = 2\pi\, \delta(x-y)$$

Die Fourier Transformation kann auch von der Fourierreihe hergeleitet werden im Limes $L \to \infty$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{ik_n x} \qquad k_n = \frac{2\pi}{L} n$$

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L} \quad : \text{immer dichter für } L \to \infty$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{L} \cdot \frac{1}{2\pi} \underbrace{L \cdot c_n}_{} \, e^{ik_n x}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta k}{2\pi} \, e^{ik_n x} \, g(k_n) \qquad : \text{Rieman Summe}$$

$$\xrightarrow[\substack{L \to \infty \\ \Delta k \to 0}]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \, e^{ikx} \, g(k)$$

mit $g(k_n) = L \cdot \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \, e^{-ik_n x} f(x) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-ikx} f(x) \equiv \hat{f}(k)$

gerade der Fouriertransformierten.

Wichtige Faustregel

$$\frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xrightarrow[L \to \infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}$$

Eigenschaften der Fouriertransformierten:

- $f(x)$ reel $\Longrightarrow$ $\hat{f}(k) = \hat{f}^*(-k)$

- $f(x)$ symmetrisch $\Longrightarrow$ $\hat{f}(k) = \hat{f}(-k)$

- Satz von Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, g^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \hat{f}(k)\, \hat{g}^*(k)$$

$$\Gamma \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, g^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, \hat{f}(k)\, g^*(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \hat{f}(k) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, g(x) \right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, \hat{f}(k)\, \hat{g}^*(k) \lrcorner$$

- Die Fouriertransformierte einer Faltung erfüllt

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, g(x-y) \qquad : \text{Faltung}$$

$$\Longrightarrow \hat{h}(k) = \hat{f}(k)\, \hat{g}(k)$$

und umgekehrt gilt für ein Produkt

$$h(x) = g(x) \cdot f(x)$$

$$\Longrightarrow \hat{h}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi}\, \hat{g}(q)\, \hat{f}(k-q)$$

: Faltung im Fourier Raum.

$$\hat{h}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-ikx} f(y)\, g(\overbrace{x-y}^{z}) \qquad x = z + y$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-iky} f(y)}_{\hat{f}(k)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-ikz} g(z)}_{\hat{g}(k)} = \hat{f}(k)\, \hat{g}(k)$$

Für Ableitungen gilt:

$$h(x) = \frac{d}{dx} f(x) \qquad\qquad h(x) = x \cdot f(x)$$

$$\Longrightarrow \hat{h}(k) = ik\, \hat{f}(k) \qquad\qquad \Longrightarrow \hat{h}(k) = i \frac{d}{dk} \hat{f}(k)$$

$$\hat{h}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \frac{d}{dx} f(x) = \underbrace{\left[e^{-ikx} f(x) \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d}{dx} e^{-ikx} \right) f(x)$$

$$= \int dx\, ik\, e^{-ikx} f(x) = ik\, \hat{f}(k)$$

In höheren Dimensionen ist die Fouriertransformierte definiert als

$$f(\vec{r}) = \int \frac{dk^3}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \hat{f}(\vec{k})$$

$$\hat{f}(\vec{k}) = \int d\vec{r}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, f(\vec{r})$$

Falls das Feld $f(\vec{r},t)$ zusätzlich noch zeitabhängig ist, so ist es Tradition das Vorzeichen für die Fouriertransformation bezüglich der Zeit zu drehen

$$f(\vec{r},t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \; e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \; \hat{f}(\vec{k},\omega)$$

$$\hat{f}(\vec{k},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dr^3 \; e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \; f(\vec{r},t)$$

Der Grund dafür liegt in der Lorentzinvarianz (Relativitäts-Theorie) dass eine elegantere Formulierung erlaubt.

9.3. Anwendung: Als Anwendung wollen wir nochmals die Lösung zur partiellen Differentialgleichen suchen

$$-\Delta\phi(\vec r) + m^2\phi(\vec r) \doteq 4\pi\,\delta(r)$$

Diesesmal Fouriertransformieren wir die Gleichung auf beiden Seiten:

$$\int d\vec r\; e^{-i\vec k\cdot\vec r}\,\Delta\phi(\vec r) = -k^2\,\hat\phi(k)$$

$$\int d\vec r\; e^{-i\vec k\cdot\vec r}\,m^2\phi(\vec r) = m^2\,\hat\phi(k)$$

$$\int d\vec r\; e^{-i\vec k\cdot\vec r}\,4\pi\,\delta(\vec r) = 4\pi$$

und die Gleichung reduziert sich zu einer algebraischen Gleichung

$$\left[k^2 + m^2\right]\hat\phi(k) = 4\pi$$

$$\Longrightarrow \quad \hat\phi(\vec k) = \frac{4\pi}{k^2+m^2}$$

Die Lösung hat somit die Form

$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{k^2+m^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Mittels Kugelkoordinaten können wir dieses Integral berechnen

$$\phi(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{\infty} \frac{dk \cdot k^2}{(2\pi)^3} \cdot \frac{4\pi}{k^2+m^2} e^{ikr\cos\vartheta}$$

$$\overset{\substack{z=\cos\vartheta \\ dz=\sin\vartheta}}{=} \int_{-1}^{1} dz \int_0^{\infty} \frac{dk}{\pi} \frac{k^2}{k^2+m^2} e^{ikrz}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dk}{\pi} \frac{k^2}{k^2+m^2} \frac{1}{ikr} \left[e^{ikr} - e^{-ikr}\right]$$

$$= \int_{-0}^{\infty} \frac{dk}{\pi} \frac{k}{k^2+m^2} \frac{1}{ir} \left[e^{ikr} - e^{-ikr}\right]$$

$$= \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\pi} \frac{k}{k^2+m^2} \frac{1}{i} e^{ikr}$$

$$= \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\pi} \frac{(-1)}{k^2+m^2} \partial_r e^{ikr} = \frac{1}{r} \partial_r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\pi} \frac{(-1)}{k^2+m^2} e^{ikr}$$

$$= \frac{1}{r} \partial_r \frac{(-1)}{m} e^{-mr} = \frac{e^{-m|r|}}{|r|} \xrightarrow{m\to 0} \frac{1}{|r|}$$