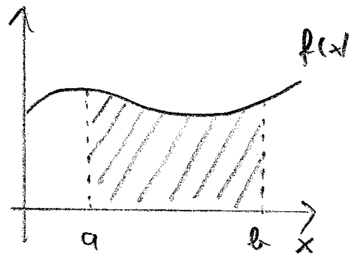
2. Integration



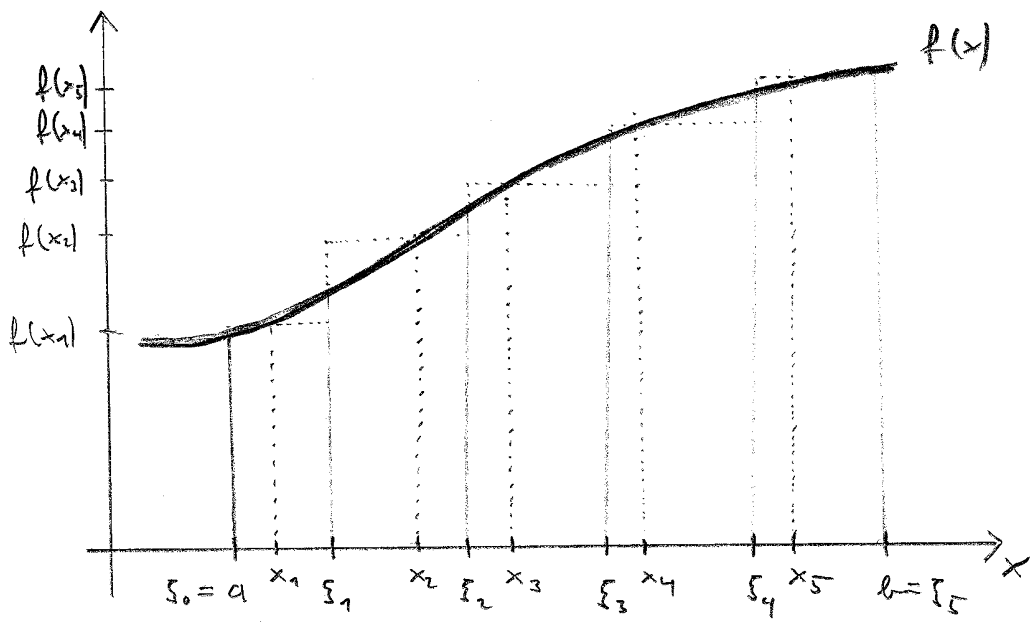
Das Integral $I = \int_a^b f(x)\,dx \equiv \int_a^b dx\, f(x)$ kann als Fläche unter der Kurve $f(x)$ verstanden werden. Die formale Definition folgt ebenfalls aus einem Grenzwertprozess. Dazu wird das Intervall $a \le x \le b$ in eine grosse Anzahl von kleinen Intervallen aufgeteilt

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n = b$$

und dann folgende Summe geformt

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,(\xi_i - \xi_{i-1}) \qquad (2.1)$$

Die Positionen x_i sind beliebig im Intervall $\xi_{i+1} \le x_i \le \xi_i$. Das (Riemann'sche) Integral erhält man nun im Limes wo die Länge der Intervalle $\xi_{i-1} \le x \le \xi_i$ gegen Null geht.



Eine Funktion $f(x)$ heisst integrierbar, wenn dieser Grenzwert existiert. Desweitern muss er eindeutig sein, d.h., unabhängig von der Wahl von ξ_i und x_i.

Bsp: $\int_0^b dx\, x = \frac{1}{2} b^2$

Unterteile das Interval $0 \leq x \leq b$ in n gleichmässige Teile $\xi_k = k \cdot \Delta x$ mit $\Delta x = \frac{b}{n}$. Wähle $x_i = \xi_i$, so gilt für die Summe

$$S = \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot k \cdot \Delta x = b^2 \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= b^2 \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2} \frac{n+1}{n}$$

Den Grenzwert $\Delta x \to 0$ erhalten wir somit für $n \to \infty$, und das Intergral wird zu

$$I = \int_0^b dx\, x = \lim_{n \to \infty} \frac{b^2}{2} \frac{n+1}{n} = \frac{b^2}{2}$$

Bem: Jedes Integral kann geschrieben werden als

$$\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x \qquad (2.2)$$

mit $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Das Integral hat folgende Eigenschaften:

$$\int_a^b dx\, 0 = 0 \qquad \int_a^a dx\, f(x) = 0$$

$$\int_a^c dx\, f(x) = \int_a^b dx\, f(x) + \int_b^c dx\, f(x) \qquad (2.3)$$

$$\int_a^b dx\,[f(x) + g(x)] = \int_a^b dx\, f(x) + \int_a^b dx\, g(x)$$

Bem: • Falls $a > b$ ist so definiert man

$$\int_a^b dx\, f(x) = -\int_b^a dx\, f(x)$$

(2.4)

• $$\int_a^\infty dx\, f(x) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx\, f(x)$$

2.1. Stammfunktion

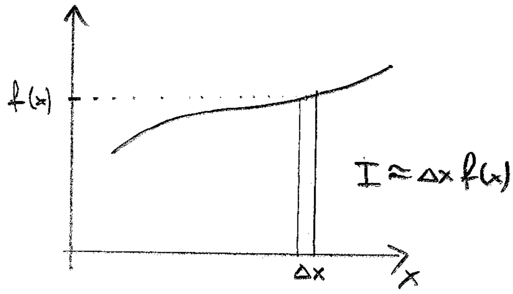
Ersetzt man die obere Integrationsgrenze b durch x so definiert das Integral eine neue Funktion

$$F(x) = \int_a^x du\, f(u) \qquad (2.5)$$

Diese Funktion lässt sich jetzt differenzieren

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} du\, f(u) = \int_a^x du\, f(u) + \int_x^{x+\Delta x} du\, f(u)$$

$$= F(x) + \int_x^{x+\Delta x} du\, f(u)$$



Somit folgt für die Ableitung

$$\frac{d}{dx} F(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} du\, f(u)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\Delta x\, f(x) + o(\Delta x^2) \right] = f(x)$$

Jede Funktion $F(x)$ die erfüllt dass

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \tag{2.6}$$

heisst Stammfunktion von $f(x)$ oder unbestimmtes Integral.
Alle Stammfunktion unterscheiden sich nur durch eine Konstante: $G(x) = F(x) + c$ ist ebenfalls eine Stammfunktion zu $f(x)$

Man schreibt daher für das unbestimmte Integral

$$F(x) = \int dx\, f(x) \tag{2.7}$$

Das bestimmte Integral folgt somit von der Stammfunktion

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) \equiv F\Big|_a^b \tag{2.8}$$

Es folgen sogleich eine Reihe elementarer Integrale:

$$\cdot \int dx\, x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\cdot \int dx\, e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} \qquad (2.9)$$

$$\cdot \int dx\, \frac{a}{x} = a \cdot \ln|x|$$

$$\cdot \int dx\, \cos bx = \frac{1}{b} \sin bx$$

2.2 Integrationsregeln

Substitution: Es sei $y = g(x)$ so gilt

$$\cdot \int dy\, f(y) = \int dx\, g'(x)\, f(g(x)) \qquad (2.10)$$

Bem: Schreibe $\frac{d}{dx} y = g'(x) \Rightarrow dy = g'(x)\, dx$

$$\cdot \int_a^b dy\, f(y) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} dx\; g'(x)\, f(g(x))$$

Partielle Integration: $\int dx\, f'(x)\, g(x) = f(x)\, g(x) - \int dx\, f(x)\, g'(x)$ (2.11)

Bsp: $\cdot \int dx\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x=\sin y}{=} \int dy\, \cos y \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \int dy\, \cos y\, \frac{1}{\cos y}$

$$= y = \arcsin x$$

$$\cdot \int dx\, \ln x = \int dx\, \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \ln x = x \ln x - \int dx\, x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= x \ln x - x$$