4. Komplexe Zahlen

Die Gleichung $z^2 = -1$ hat keine Lösung in den reelen Zahlen. Man kann jedoch die reelen Zahlen $\mathbb{R}$ erweitern, so dass diese Gleichung ebenfalls zwei Lösungen besitzt.

Dazu führt man die imaginäre Einheit ein

$$i \text{ mit der Definition } i^2 = -1 \tag{4.1}$$

Die beiden Lösungen obiger Gleichung nehmen die Form an

$$z = \pm i$$

Eine Zahl in diesem erweiterten Raum kann somit einen Realteil und einen Imaginär Teil besitzen und heisst komplexe Zahl

$$z = \underbrace{x}_{\text{real Teil}} + i \underbrace{y}_{\text{imaginär Teil}} \qquad x, y \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

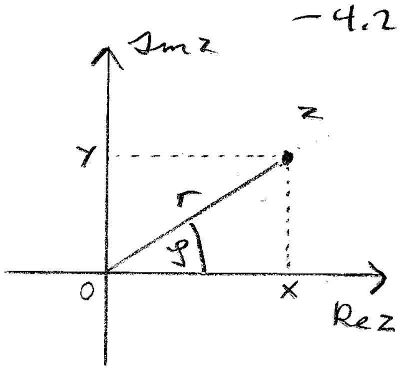
$$z \in \mathbb{C}$$

Das Rechnen mit komplexen Zahlen verhält sich gleich wie mit reelen Zahlen:

$$(x+iy) + (u+iv) = (x+u) + i(y+v) \tag{4.3}$$

$$(x+iy)(u+iv) = xu - yv + i(xv + uy)$$

Eine komplexe Zahl kann in der komplexen Ebene dargestellt werden.



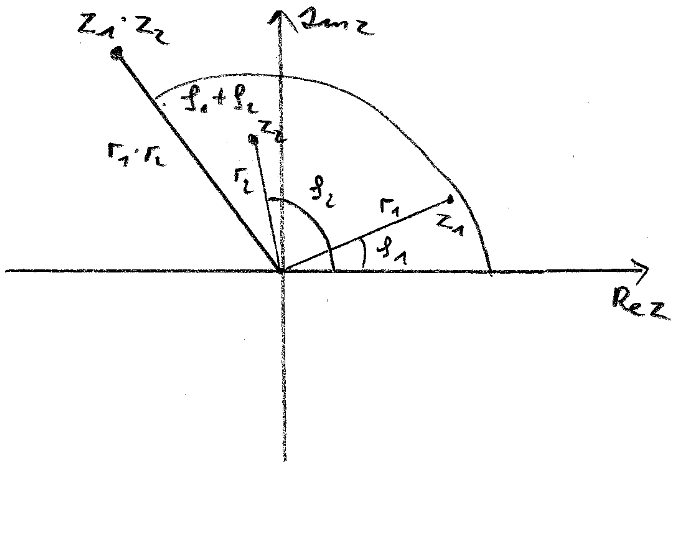
$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\, z &= x = r \cdot \cos\varphi && : \text{real Teil} \\
\mathrm{Im}\, z &= y = r \sin\varphi && : \text{imaginär Teil} \\
r &= \sqrt{x^2 + y^2} \equiv |z| && : \text{Betrag von } z \\
\varphi &= \arctan\frac{y}{x} \equiv \arg(z) && : \text{Argument von } z
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

<u>Bem:</u> $z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$$= r_1 r_2 \left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right)$$

$$= r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right] \tag{4.5}$$

d.h.; multiplikation zweier komplexen Zahlen multipliziert ihr Betrag und addiert ihr Argument.



4.1. Komplex Konjugierte

Es gibt eine spezielle Funktion, das Komplex Konjugierte, dass jeder komplexen Zahl eine neue komplexe Zahl zuordnet mittels

$$z = x + iy \implies \bar{z} = x - iy$$

Somit gilt:

$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z \qquad (4.6)$$
$$z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}\,z$$
$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

Es gelten die Rechenregeln

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \qquad (4.7)$$
$$\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$
$$\overline{(z_1 + i z_2)} = \bar{z}_1 - i \bar{z}_2$$

<u>Bem:</u> Die Division von komplexen Zahlen erfolgt am einfachsten mit folgendem Trick

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x+iy}{u+iv} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(x+iy)(u+iv)}{u^2+v^2}$$

$$= \frac{xu + yv \mp i(xv \mp yu)}{u^2 + v^2}$$

4.2 Funktionen komplexer Variablen

Bsp: $\cdot$ $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

Die Ableitung von komplexen Funktion folgt in analogy zur Ableitung reeler Funktionen

$$\frac{d}{dz} f(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad (4.8)$$

Bem: Falls eine komplexe Funktion differenzierbar in einer kleinen Umgebung ist, so heisst sie analytisch.

Bsp: $\frac{d}{dz} z^n = n \cdot z^{n-1}$

Die exponential Funktion $\exp(z)$ ist definiert mittels der Potenzreihe

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \qquad (4.9)$$

Bem: $\cdot$ Die Potenzreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$

- $\exp(1) \equiv e$ Eulersche Zahl
- $\exp(x) = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \exp(z) \equiv e^z$ Erweiterung von e^z auf komplexe Zahlen

Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften

$$\frac{d}{dz}\exp(z) = \exp(z) \qquad (4.10)$$

$$\frac{d}{dz}\exp(z) = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d}{dz}z^n$$

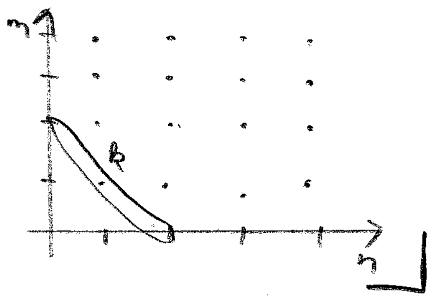
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n = \exp(z)$$

$$\exp(z_1)\cdot\exp(z_2) = \exp(z_1+z_2) \qquad (4.11)$$

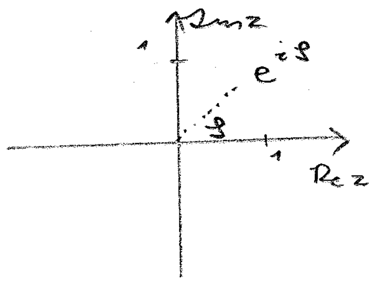
$$\exp(z_1)\cdot\exp(z_2) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z_1^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}z_2^m\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,m!}z_1^n z_2^m$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{k!\,(l-k)!}z_1^k z_2^{l-k}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}(z_1+z_2)^l = \exp(z_1+z_2)$$



Von besonderem Interesse ist der Wert von e^z für rein imaginares $z = i\vartheta$:



$$e^{i\vartheta}\cdot\left(\overline{e^{i\vartheta}}\right) = e^{i\vartheta}e^{-i\vartheta} = 1$$

$\Rightarrow$ $e^{i\vartheta}$ liegt auf dem Einheitskreis aus der Definition von $\exp(i\varphi)$ folgt

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \varphi^{2n}}_{\cos\varphi} + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \varphi^{2n+1}}_{\sin\varphi}$$

$$\Longrightarrow \cdot\ e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (4.12)$$

$$\cdot\ \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

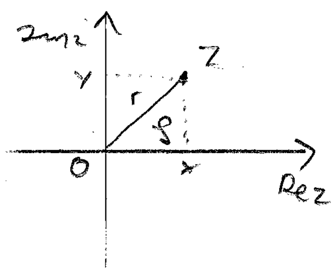
$$\cdot\ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Bem: Es gilt somit die mathematische Gleichung

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \qquad (4.13)$$

Jede komplexe Zahl kann somit geschrieben werden als

$$z = r\, e^{i\varphi}$$



Bsp: $\cdot\ z^n = \left(r e^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$

$$\cdot\ \left(e^{i\varphi}\right)^2 = e^{i2\varphi} = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

$$= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \underbrace{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}_{\cos 2\varphi} + \underbrace{2i\sin\varphi\cos\varphi}_{i\sin 2\varphi}$$

Bem: Der $\cos z$ und $\sin z$ für komplexe Zahlen sind nun ebenfalls definiert. Insbesondere gilt

$$\cos ix = \frac{e^{i\cdot ix} + e^{-i\cdot ix}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh x$$

$$\sin ix = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i} = i\,\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = i \sinh x$$

Bsp: $\cosh 2x = \cos 2ix = \cos^2 ix - \sin^2 ix$
$= \cosh^2 x + \sinh^2 x$

4.3 Logarithmus

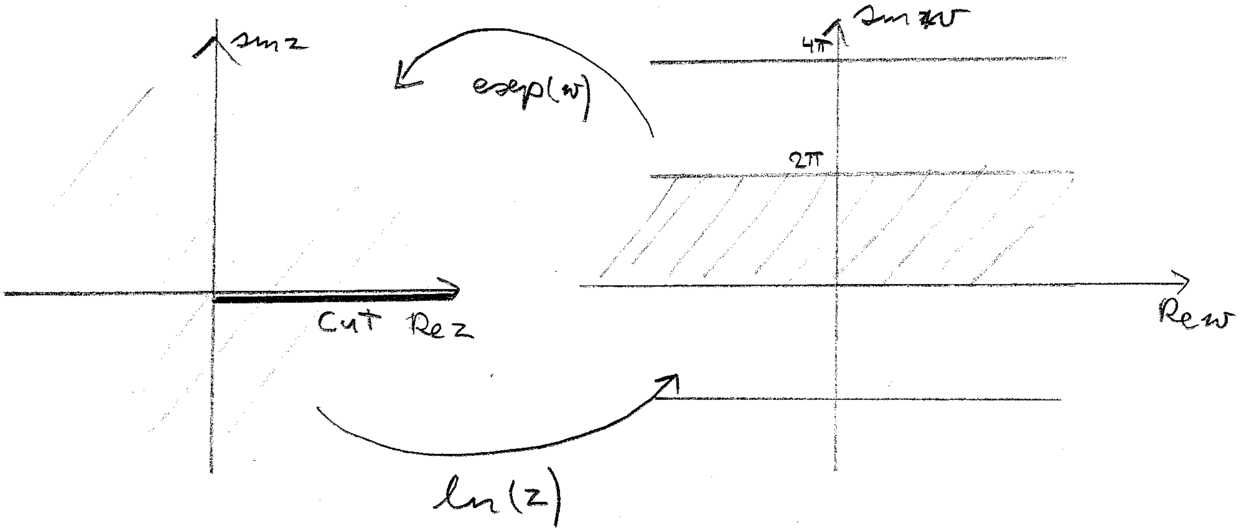
Der Logarithmus ist definiert als Umkehrfunktion von $\exp(z)$.

$$z = e^{w} \iff w = \ln z$$

Schreiben wir $z = r e^{i\varphi} = r e^{i\varphi + 2\pi i k}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$
so gilt

$$\ln z = \underbrace{\ln r + i\varphi}_{\text{Hauptwert}} + 2\pi i k$$

mit einem beliebigen $k \in \mathbb{Z}$. Somit ist der Logarithmus nicht mehr eindeutig.



Die Exponentialfunktion bildet den Bereich $x \in (-\infty, \infty)$ und $y \in [0, 2\pi)$ bereits auf die gesamte komplexe Ebene ab. Daher wissen wir nicht mehr, von welchem k wir gestartet sind. Der Logarithmus hat daher einen Schnitt in der komplexen Ebene, wo die Funktion nicht stetig ist. Die Lage des Schnittes kann im Prinzip frei gewählt werden.

Mit Hilfe des Logarithmus lässt sich jetzt auch beliebige Wurzeln und Potenzen definieren

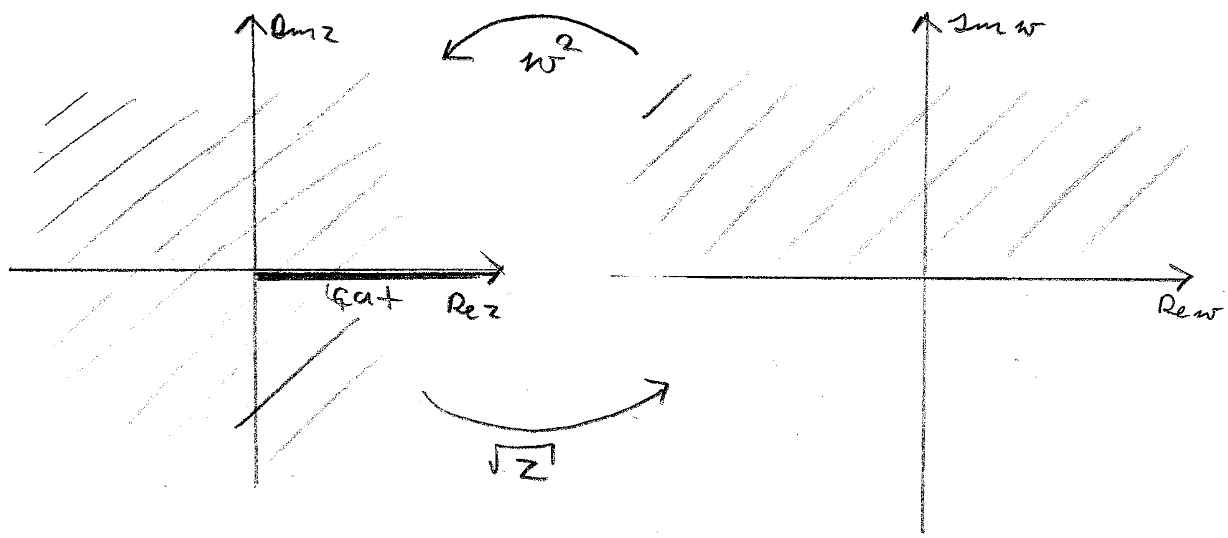
$$f(z) = z^{\nu} = \exp(\nu \cdot \ln z)$$

Für $\nu = \frac{1}{2}$ erhalten wir die Wurzelfunktion

$$f(z) = \sqrt{z}$$

Die Vieldeutigkeit des Logarithmus wird auf die Wurzelfunktion vererbt

$$\sqrt{z} = \sqrt{r e^{i\varphi}} = \sqrt{r}\; e^{i\frac{\varphi}{2} + k i \pi} \qquad k = 0, 1$$



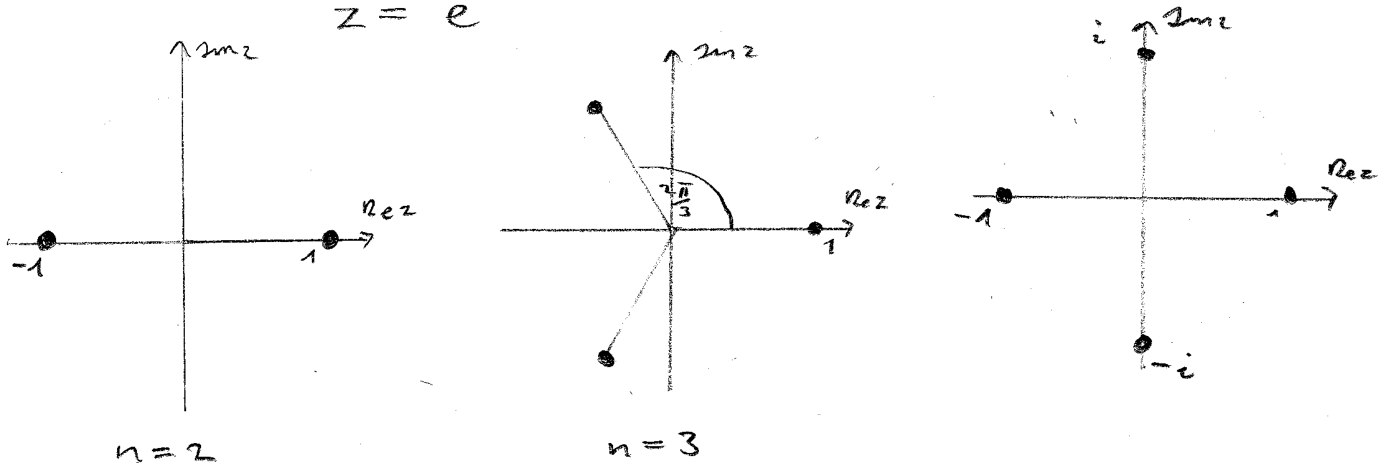
Diese Vieldeutigkeit kann elegant interpretiert werden durch das Einführen von Riemannschen Blättern. Man interpretiert die z-Ebene bestehend aus 2 Riemannschen Blättern; Das erste Blatt wird mittels $\sqrt{z}$ auf die obere Halbebene in der w-Ebene abgebildet, das zweite Riemannsche Blatt wird auf die untere Halbebene abgebildet.

Die beiden Riemannschen Blätter heissen Riemannsche Flächen. Die Wurzel Funktion ist dann analytisch von der Riemannschen Fläche nach $\mathbb{C}$ (ausser $z=0$). Der Schnitt ist die Kreuzungslinie der beiden Blätter.

Bem: Für den $\ln(z)$ ist die Riemannsche Fläche eine Spirale.

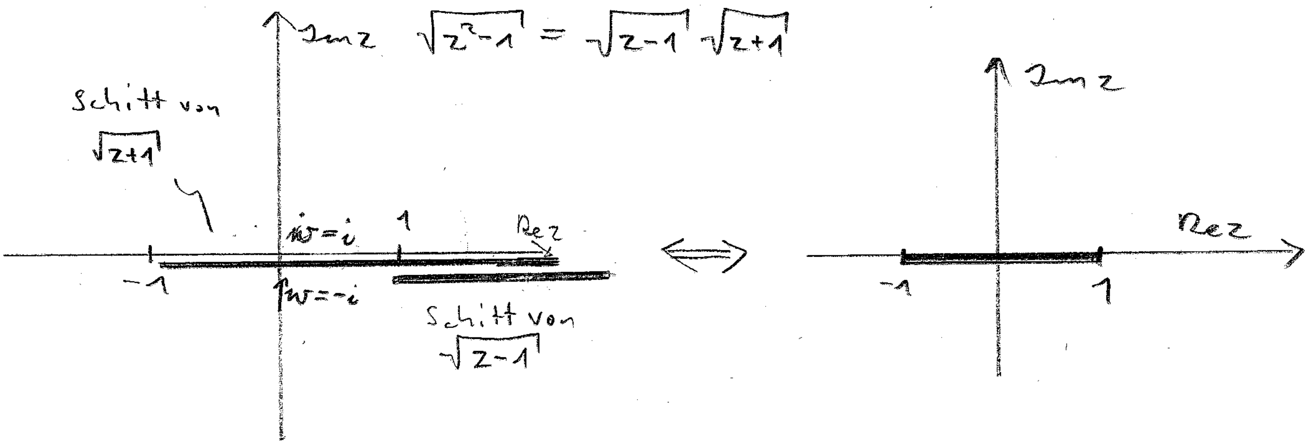
Bsp: • Lösungen von $z^n = 1$ haben die Form

$$z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$$



• Der Schnitt der Funktion $\sqrt{z^2-1}$ hat folgende Form:

$$\sqrt{z^2-1} = \sqrt{z-1}\,\sqrt{z+1}$$



Über den Schnitt springt das Argument von $w = \sqrt{z^2-1}$ um π. Im Bereich der beiden Schnitte springt das Argument von w um 2π und ist somit identisch.