8 Krummlinige Koordinaten

Die drei häufigsten Koordinatensysteme sind

x, y, z : kartesische Koordinaten

r, φ, z : Zylinder Koordinaten

r, φ, ϑ : Kugel Koordinaten

Eine gemeinsame Eigenschaft dieser Systeme ist, dass orthogonal sind und dass der Laplace Operator separiert. (siehe später)

Die Koordinaten Transformation hat im allgemeinen die Form

$$x_1 = x_1(u_1, u_2, u_3)$$
$$x_2 = x_2(u_1, u_2, u_3) \qquad \vec{r}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$x_3 = x_3(u_1, u_2, u_3)$$

Die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien sind definiert als

$$\vec{T}_i \equiv \vec{e}_{u_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \qquad \text{mit} \quad h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right|$$

Wir sind interessiert an orthogonalen Koordinatensystemen mit

$$\vec{e}_{u_i} \cdot \vec{e}_{u_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Somit bilden in jedem Punkt $\vec{r}$ die Vektoren $\vec{e}_{u_i}$ eine Orthonormierte Basis. Die Vektoren $\vec{e}_{u_i}$ hängen somit explizit vom Raumpunkt $\vec{r}$ ab.

Bem: Wir können auch schreiben

$$\vec{e}_{u_1} = \vec{e}_{u_2} \times \vec{e}_{u_3}$$

Ein Skalarfeld $\phi(\vec{r})$ können wir einfach in den neuen Koordinaten ausdrücken

$$\phi(u_1, u_2, u_3) = \phi(\vec{r}(u_1, u_2, u_3))$$

Für ein Vektorfeld, $\vec{A}(\vec{r})$ müssen wir aber zusätzlich die neue Basis $\vec{e}_{u_i}$ berücksichtigen

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_{u_i} A_{u_i}(u_1, u_2, u_3)$$

A_{u_i} erhalten wir mittels dem Skalarprodukt

$$A_{u_i} = \vec{A} \cdot \vec{e}_{u_i}$$

Bem: In den krummlinigen Koordinaten sind jetzt A_{u_i} und $\vec{e}_{u_i}$ von $u_1 \dots u_3$ abhängig

$$\Longrightarrow \quad \partial_{u_j} \vec{A} = \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial A_{u_i}}{\partial u_j} \vec{e}_{u_i} + A_{u_i} \frac{\partial \vec{e}_{u_i}}{\partial u_j} \right]$$

Bsp: Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ in Zylinder Koordinaten:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{d}{dt} \left(r \vec{e}_r + z \vec{e}_z \right) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r + \dot{z} \vec{e}_z + z \overset{=0}{\widetilde{\dot{\vec{e}}_z}}$$

$$= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z$$

Im folgenden wollen wir untersuchen, wie sich die Ableitungsoperatoren transformieren.

Gradient: Die Komponente von $\nabla\phi$ in $\vec{e}_{u_i}$ ist

$$(\nabla\phi)_{u_i} = \nabla\phi \cdot \vec{e}_{u_i} = \nabla\phi \cdot \frac{1}{h_{u_i}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$$

$$= \frac{1}{h_{u_i}} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$$

$$= \frac{1}{h_{u_i}} \partial_{u_i} \phi(\vec{r}(u_1 u_2 u_3)) = \frac{1}{h_{u_i}} \frac{\partial \phi}{\partial u_i}$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla\phi = \sum_i \vec{e}_{u_i} \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial u_i}$$

Divergenz: Für die Divergenz in krummlinigen Koordinaten gilt

$$\operatorname{div} \vec{A}(u_1,u_2,u_3) = \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}} \left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_{u_1} h_{u_3} A_{u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(h_{u_1} h_{u_2} A_{u_3}\right)\right]$$

Betrachte zuerst den Anteil $\vec{e}_{u_1} A_{u_1}$

$$\nabla\cdot\left(\vec{e}_{u_1} A_{u_1}\right) = \nabla\cdot\left(\left(\vec{e}_{u_2}\times\vec{e}_{u_3}\right) A_{u_1}\right) \qquad : \vec{e}_{u_i} = h_{u_i}\cdot\nabla u_i$$

$$= \nabla\cdot\left(h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1} \left(\nabla u_2 \times \nabla u_3\right)\right)$$

$$= \nabla\left(h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1}\right)\cdot\left(\nabla u_2\times\nabla u_3\right) + h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1} \underbrace{\nabla\cdot\left(\nabla u_2\times\nabla u_3\right)}_{=0}$$

$$= \frac{1}{h_{u_2} h_{u_3}}\, \vec{e}_{u_1}\cdot\nabla\left(h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1}\right)$$

$$= \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}}\, \frac{\partial}{\partial u_1}\left(h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1}\right)$$

und analog für die anderen Komponenten.

Laplace Operator: Als wichtige Anwendung erhalten wir den Laplace Operator in krummlinigen Koordinaten

$$\triangle \phi(u_1,u_2,u_3) = \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}} \left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_{u_2} h_{u_3}}{h_{u_1}} \frac{\partial \phi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_{u_1} h_{u_3}}{h_{u_2}} \frac{\partial \phi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_{u_1} h_{u_2}}{h_{u_3}} \frac{\partial \phi}{\partial u_3}\right)\right]$$

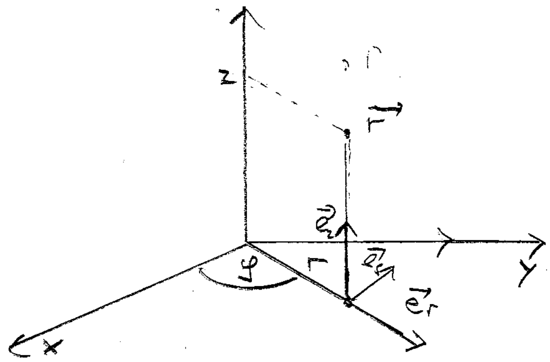
Rotation: Zur Vollständigkeit noch die Rotation

$$\mathrm{rot}\,\vec{A}(u_1,u_2,u_3) = \frac{1}{h_{u_2} h_{u_3}} \vec{e}_{u_1} \left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_{u_3} A_{u_3}\right) - \frac{\partial}{\partial u_3}\left(h_{u_2} A_{u_2}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{h_{u_1} h_{u_3}} \vec{e}_{u_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_3}\left(h_{u_1} A_{u_1}\right) - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(h_{u_3} A_{u_3}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2}} \vec{e}_{u_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(h_{u_2} A_{u_2}\right) - \frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_{u_1} A_{u_1}\right)\right]$$

8.1. Zylinder Koordinaten



Wir haben die Transformation

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

mit $0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad h_r = 1$$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad h_\varphi = r$$

$$\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h_z = 1$$

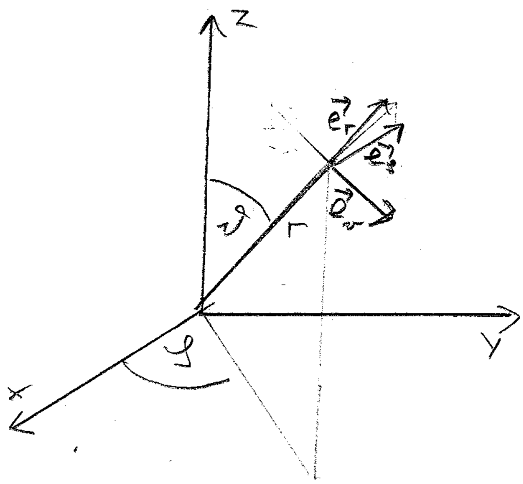
$$\nabla\phi = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\phi + \frac{1}{r}\vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}\phi + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\phi$$

$$\Delta\phi = \left[\frac{1}{r}\partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 + \partial_z^2\right]\phi$$

$$= \partial_r^2\phi + \frac{1}{r}\partial_r\phi + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\phi + \partial_z^2\phi$$

$$\int d\vec{r}^{\,3} \;\hat{=}\; \int d\varphi \int dr \cdot r \int dz$$

8.2. Kugel Koordinaten



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad h_r = 1$$

$$\vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} \qquad h_\vartheta = r$$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad h_\varphi = r\sin\vartheta$$

$$\nabla\phi = \left[\vec{e}_r \partial_r \phi + \frac{1}{r} \vec{e}_\vartheta \partial_\vartheta \phi + \frac{1}{r\sin\vartheta} \vec{e}_\varphi \partial_\varphi \phi \right]$$

$$\Delta\phi = \left[\frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \partial_r \right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta} \partial_\vartheta \left(\sin\vartheta \, \partial_\vartheta \right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta} \partial_\varphi^2 \right] \phi$$

$$\int d\vec{r} = \int dr\, r^2 \int d\vartheta \sin\vartheta \int d\varphi$$