6 Differenzial- und Integralrechnung mit mehreren Variabeln

Die verallgemeinerung der Ableitung für Funktionen mit mehreren Variabeln wird mittels der partiellen Ableitung erreicht:

- Funktion: $f(x,y)$

- partielle Ableitung: $$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad (6.1)$$

- $$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Die partielle Ableitung entspricht der Normalen Ableitung wobei die weiteren Variabeln fixiert werden.

Bem: · Equivalente schreibweisen

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \partial_x f \equiv f_x$$

- Machmal schreibt man noch die Variable die fixiert werden soll noch ~~explizit~~ hin:

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$: Ableitung nach x mit y fixiert

Bsp: $f(x,y) = x^3 y - e^{xy}$

$$\Rightarrow \partial_x f = 3x^2 y - y e^{xy} \qquad \partial_y f = x^3 - x e^{xy}$$

$$\partial_x^2 f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) = 6xy - y^2 e^{xy}$$

$$\partial_y^2 f = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} f\right) = -x^2 e^{xy}$$

$$\partial_x \partial_y f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f\right) = 3x^2 - e^{xy} - xy e^{xy}$$

$$\partial_y \partial_x f = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right) = 3x^2 - e^{xy} - yx e^{xy}$$

Bem: • Es gilt allgemein

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) \tag{6.2}$$

• Die Verallgemeinerung für Funktion mit mehr als 2 Variabeln folgt sofort:

Bsp: $f(x,y,z) = xyz \quad \Rightarrow \quad \partial_x f = yz$

$\partial_y f = xz$

$\partial_z f = xy$

Kettenregel: Die Variabeln x, y der Funktion $f(x,y)$ hängen von einem Parameter t ab

$$\Longrightarrow x(t),\ y(t)$$

Die der Funktion $f(x(t), y(t))$ nach t ist somit gegeben

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{6.3}$$

$$\ulcorner\ \Delta f(x,y) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

$$\simeq \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\Delta t$$

$$\Longrightarrow \frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\ \lrcorner$$

Bsp:

- $f(x,y) = x\,e^{-y}$ mit $x = 1+t \quad y = t^3$

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \underbrace{e^{-y(t)}}_{\frac{\partial f}{\partial x}} \cdot \underbrace{1}_{\frac{dx}{dt}} - \underbrace{x(t)\,e^{-y(t)}}_{\frac{\partial f}{\partial y}}\ \underbrace{3t^2}_{\frac{dy}{dt}}$$

$$= \left[1 - 3t^2(1+t)\right] e^{-t^3}$$

- $$\frac{d}{dt}\left(\int_0^{t^2} dx\, e^{-tx^2}\right) = 2t\, e^{-tx^2} - \int_0^{\infty} dx\, x^2 e^{-tx^2}$$

6.1 Totales Differential

Wir betrachten die Funktion $f(x,y)$ auf $\mathbb{R}^2$.
Das totale Differential ist eine lineare Abbildung die jedem Vektor $v = (v_x, v_y)$ eine reele Zahl zuordnet:

$$[df](v) = \frac{d}{dt} f(x + v_x t, y + v_y t) = \frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y \qquad (6.4)$$

Insbesondere haben wir die speziellen differentiale

$$[dx](v) = v_x$$

$$[dy](v) = v_y$$

und somit können wir schreiben

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \qquad (6.5)$$

Bem: • Dass totale Differential wird in der Physik oft als infinitesimale Änderung von f unter infinitesimalen dx und dy interpretiert.

• Es ist jedoch besser es zu interpretieren, dass für $v = (\Delta x, \Delta y)$ gilt

$$\Delta f \simeq [df](v) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

Ein Differential $A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ heisst exakt, wenn eine Funktion $f(x,y)$ existiert mit

$$A(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$B(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Eine notwendige Bedingung dass ein Differential exakt ist (und auf topologisch trivialen Gebieten auch hinreichend)

$$\frac{\partial A(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial B(x,y)}{\partial x} \qquad (6.6)$$

Bsp: · $y\,dx + x\,dy \implies f(x,y) = xy + c$

· $y\,dx + 3x\,dy \implies$ inexakt

· Anwendungen finden wir vorallem in der Thermodynamik:

$$dF = -\underbrace{S}_{\text{Entropie}}\,\overbrace{dT}^{\text{Änderung der Temp}} - \underbrace{P}_{\text{Druck}}\,dV \qquad : \text{Freie Energie}$$

$$\implies \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p$$

$$\implies \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \qquad : \text{Maxwell Relation}$$

6.2. Variabeln Transformation

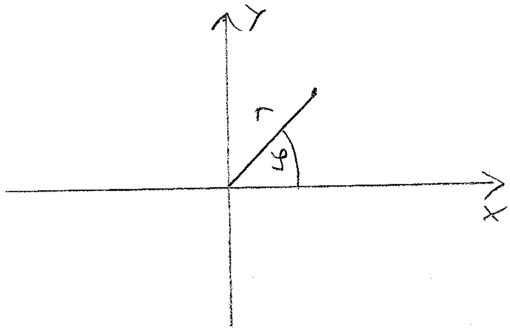
Wir betrachten die Funktion $f(x_1 \dots x_n)$.
Die Variabeln x_i sind aber ebenfalls Funktionen von n-anderen Variabeln u_i:

$$x_i = x_i(u_1 \dots u_n)$$

Aus der Kettenregel folgt somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u_i} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} \end{aligned} \tag{6.7}$$

<u>Bsp:</u> Polar Koordinaten:



$$x = r \cos\varphi$$
$$y = r \sin\varphi$$

$$\Longrightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \arctan y/x$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-\left(\frac{y}{x^2}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y^2}{x^2}\right)} = \frac{\cos\varphi}{r}$$

Somit gilt:

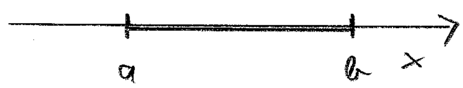
$$\partial_x = \cos\varphi\,\partial_r - \frac{\sin\varphi}{r}\partial_\varphi$$

$$\partial_y = \sin\varphi\,\partial_r + \frac{\cos\varphi}{r}\partial_\varphi$$

6.3 Mehrdimensionale Integrale

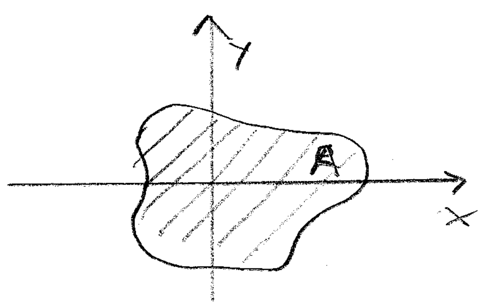
Das bestimmte Integral

$$\int_a^b dx\, f(x)$$



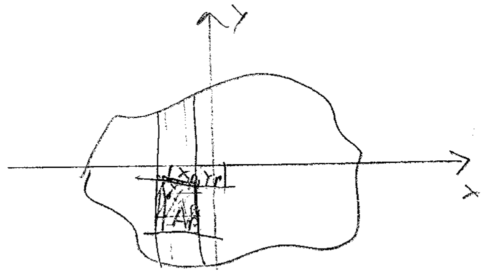
kann aufgefasst werden als Integral über die eindimensionale Region $a \le x \le b$ der Funktion $f(x)$. Mehrdimensionale Integrale erweitern dies nun auf höher dimensionale Regionen:

- bestimmtes Integral von $f(x,y)$ auf der Fläche A.



$$I = \int_A dx\,dy\; f(x,y) \tag{6.8}$$

Die Formale Definition folgt in Analogie zum Riemann Integral über einen Grenzwert:



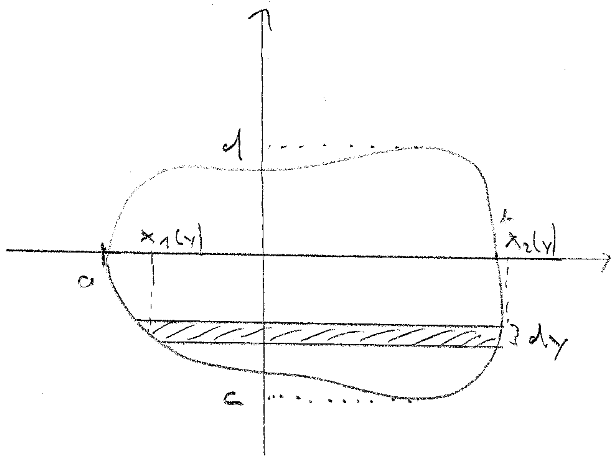
$$S = \sum_{p=1}^{N} f(x_p, y_p)\,\Delta A_p \qquad (6.9)$$

- Unterteile die Fläche A in N unter Flächen ΔA_p $p = 1 \ldots N$ und wähle beliebigen Punkt (x_p, y_p) in A_p. Falls die Summe S gegen einen eindeutigen Wert konvergiert für $\Delta A_p \to 0$ so existiert das Integral mit

$$I = \int_A dx\,dy\, f(x,y) = \lim_{\Delta A_p \to 0} S \qquad (6.10)$$

Der bequeme Weg das Integral zu berechnen, ist zuerst das Integral über einen horizontalen Streifen dy zu berechnen:

$$\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\, f(x,y)\right] dy$$

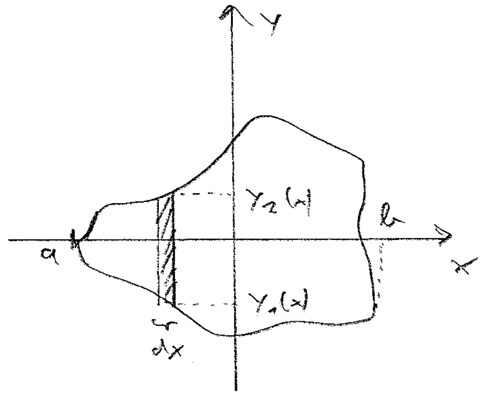


und im zweiten Schritt das Integral über y zu berechnen

$$I = \int_c^d dy \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\, f(x,y) \right)$$

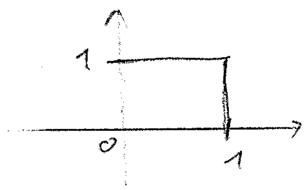
Bem: Als Alternative kann auch zuerst das Integral über y berechnet werden und im zweiten Schritt das Integral über x:

$$I = \int_a^b dx \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \; f(x,y) \right)$$



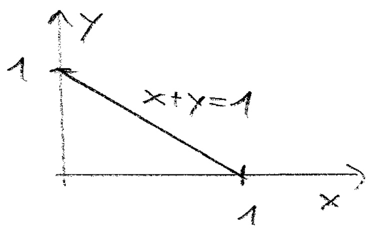
Bsp:

- Die Fläche A sei das Quadrat mit Seiten Länge 1 und $f(x,y) = xy^2$



$$\int_A dx\,dy\; xy^2 = \int_0^1 dy \int_0^1 dx\; xy^2$$

$$= \int_0^1 dy\, y^2 \underbrace{\left(\int_0^1 dx\, x \right)}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \int_0^1 dy\, y^2 = \frac{1}{6}$$



- Die Fläche A sei nun das Dreieck beschränkt durch die Linien $x=0$, $y=0$, $x+y=1$

$$\int_A dx\,dy\; xy^2 = \int_0^1 dy\; y^2 \int_0^{1-y} dx\; x = \int_0^1 dy\; y^2 \left(\frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{1-y} \right)$$

$$= \int_0^1 dy \frac{1}{2} y^2 (1-y)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{10-15+6}{60} = \frac{1}{60}$$

6.4. Variablen Transformation

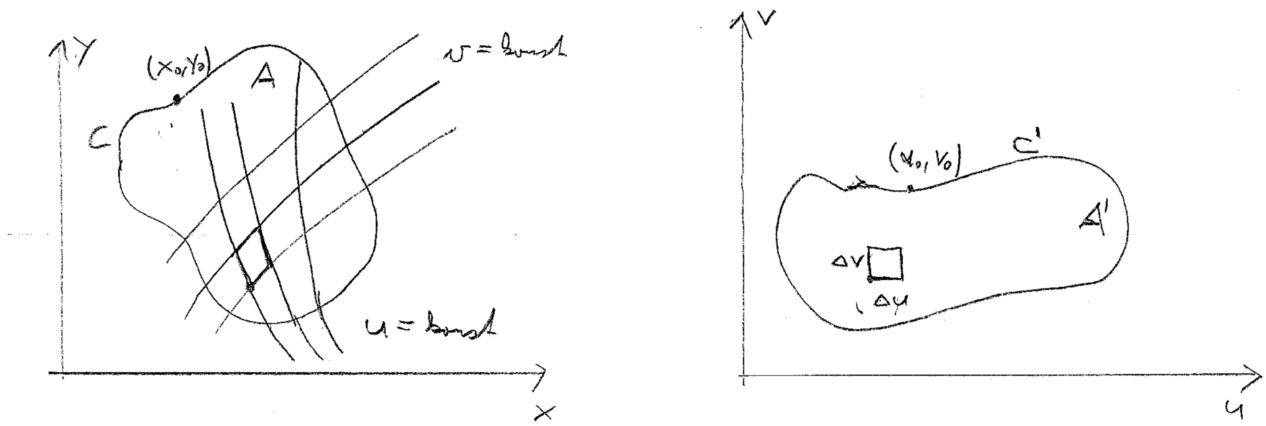
Wir betrachten das Integral auf dem Bereich A

$$I = \int_A dx\,dy\; f(x,y)$$

wobei die Variablen $x(u,v)$, $y(u,v)$ ebenfalls Funktionen von den Variablen u, v sind.

$$\Longrightarrow \quad \hat{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$$

Im folgenden wollen wir untersuchen, wie das Integral in den neuen Variablen aussieht.

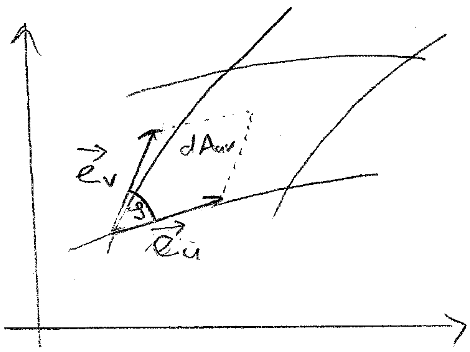


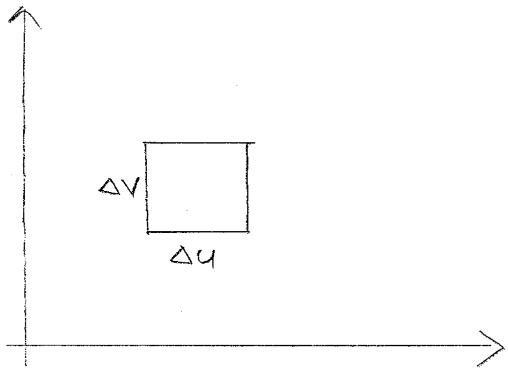
- Zuerst müssen wir den Integrationsbereich A in den neuen Integrationsbereich A' umformen

D.h., der Bereich A ist beschränkt mit der geschlossenen Kontur C. Der Integrationbereich A' in den neuen Variablen ist beschränkt mit der Kontur C':

- $(u_0, v_0) \in C' \implies x_0(u_0, v_0) \quad y_0(u_0, v_0)$ ~~mit~~ mit $(x_0, y_0) \in C$
- $(u, v) \in A' \implies \big(x(u,v) \,,\, y(u,v) \big) \in A$

Die Integration in den x-y Koordinaten ist der Limes von kleinen Volumenelementen.





Daher mussen wir Fläche dA_{uv} für ein kleines Quadrat $\Delta u \cdot \Delta v$ berechnen: dA_{uv} Parallelogramm aufgespannt mit

- $\vec{e}_u = \begin{pmatrix} \partial_u x(u,v) \\ \partial_u y(u,v) \end{pmatrix}$: Tangentenvektor an die Linie $v = \text{const.}$

  $\vec{e}_v = \begin{pmatrix} \partial_v x(u,v) \\ \partial_v y(u,v) \end{pmatrix}$: Tangentenvektor an die Linie $u = \text{const.}$

$$\implies dA_{uv} = \Delta u \cdot \Delta v \cdot |\vec{e}_v| \, |\vec{e}_u| \, |\sin \varphi|$$

$$= \underbrace{\left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right|}_{\equiv\, J \,:\, \text{Jacobian}} \overbrace{\Delta u \cdot \Delta v}^{du\, dv}$$

Somit folgt aus der Definition des Integrals

$$I = \int_A dx\,dy\; f(x,y) = \lim_{\Delta A_p \to 0} \sum_{p=1}^{N} f(x_p, y_p)\,\Delta A_p$$

$$= \lim_{\Delta u \Delta v \to 0} \sum_{p=1}^{N} f\big(x(u_p,v_p), y(u_p,v_p)\big) \left| \frac{\partial x}{\partial u}(u_p,v_p)\frac{\partial y}{\partial v}(u_p,v_p) - \frac{\partial x}{\partial v}(u_p,v_p)\frac{\partial y}{\partial v}(u_p,v_p)\right| \Delta v \Delta u$$

$$= \int_{A'} du\,dv\; f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \left| \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right|$$

$$= \int_{A'} du\,dv\; \hat{f}(u,v)\; J(u,v) \qquad (6.11)$$

mit dem Jacobian:

$$J(u,v) = \left| \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\right| \qquad (6.12)$$

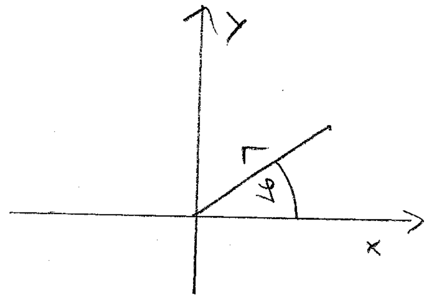
Bsp: $\displaystyle \int_0^1 dx \int_0^1 dy\; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ $\quad \begin{aligned} x &= \sin\varphi \\ y &= \sin\vartheta \end{aligned}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\; \cos\varphi \cdot \cos\vartheta\; \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}\;\sqrt{1-\sin^2\vartheta}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

Polar Koordinaten:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$



$$\Rightarrow J(r,\varphi) = \left| \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right|$$

$$= \left| \cos\varphi\, r\cdot\cos\varphi - \sin\varphi\,(-1)\, r\sin\varphi \right|$$

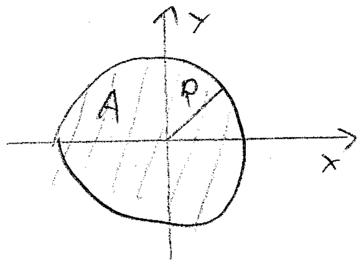
$$= r$$

$$\Rightarrow \int_A dx\,dx\, f(x,y) = \int_{A'} d\varphi\, dr\cdot r\, f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$= \int_{A'} d\varphi\, dr\, r\, \hat{f}(r,\varphi) \qquad (6.13)$$

<u>Bsp:</u> • $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$:

• $A \mathrel{\hat{=}}$ Kreis mit Radius R



$$\Rightarrow \hat{f}(r,\varphi) = e^{-r^2}$$

$$I \doteq \int_A dx\,dy\; e^{-(x^2+y^2)} = \int_{A'} d\varphi\, dr\; r\, e^{-r^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr\; r e^{-r^2} = 2\pi \int_0^R dr\; r e^{-r^2}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}\, e^{-r^2}\Big|_0^R = \pi\left(1 - e^{-R^2}\right)$$

Als Anwendung können wir jetzt das Integral

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2}$$

berechnen:

$$F^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2}\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\; e^{-(x^2+y^2)}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr\; r\, e^{-r^2} = \pi$$

$$\Longrightarrow \quad F = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

Die Verallgemeinerung der Variablen Transformationsregel in höheren Dimensionen ergibt:

$$f(x_1 \ldots x_n) \qquad\qquad x_i(u_1 \ldots u_i)$$

$$I = \int_A dx_1 \ldots dx_n\; f(x_1 \ldots x_n)$$

$$= \int_{A'} du_1 \ldots du_n\; \hat{f}(u_1 \ldots u_n)\; J(u_1 \ldots u_n)$$

Der Jacobian ist jetzt:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & & \vdots \\ \vdots & \frac{\partial x_i}{\partial u_j} & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_n} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} \quad n \times n \text{ Matrize}$$

wobei $J = \det M$: Determinante von M (siehe lin. Algebra)

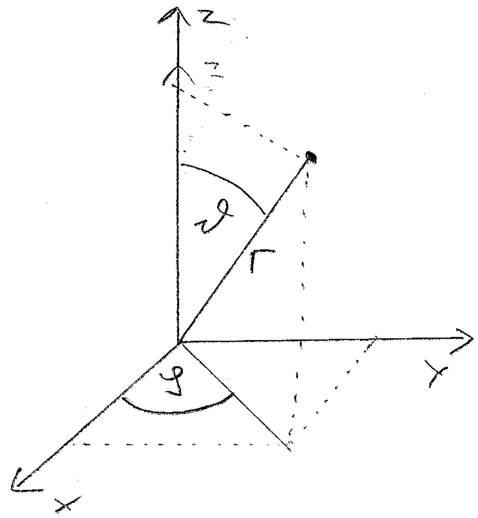
In 3 dimensions lautet es

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} J = {} & \partial_u x \left(\partial_v y \, \partial_w z - \partial_w y \, \partial_v z \right) \\ & - \partial_u y \left(\partial_v x \, \partial_w z - \partial_w x \, \partial_v z \right) \\ & + \partial_u z \left(\partial_v x \, \partial_w y - \partial_w x \, \partial_v y \right) \end{aligned}$$

Kugelkoordinaten:



$$x = r \cos\varphi \sin\vartheta$$

$$y = r \sin\varphi \sin\vartheta$$

$$z = r \cos\vartheta$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Die Flächen $r =$ konst beschreiben Kugel mit Zentrum $(0,0,0)$ und Radius r.

- $r \in [0, \infty)$
- $\varphi \in [0, 2\pi]$
- $\vartheta \in [0, \pi)$

$$I = \int_A dx\, dy\, dz\; f(x,y,z)$$

$$= \int_{A'} d\varphi\, d\vartheta \sin\vartheta\, dr\; r^2\, \hat{f}(r, \varphi, \vartheta)$$

Bsp: Volumen der Kugel: $A = \{(x,y,z) \text{ mit } x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$

$$\int_A dx\,dy\,dz\; 1 = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{} \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta}_{} \int_0^R dr\, R^2$$

$$= 2\pi \qquad 2 \qquad \frac{1}{3} R^3$$

$$= \frac{4\pi}{3} R^3$$