7 Vektoranalysis

Wir sind interessiert an Funktion von $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbb{R} \arrow[r, "f(x)"] \arrow[dr, "\vec{f}(x)" near end] & \mathbb{R} \\
\mathbb{R}^3 \arrow[ur, "f(\vec{r})" near end] \arrow[r, "\vec{f}(\vec{r})"] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

- $f(x)$: reele Funktion
- $f(\vec{r})$: skalar Feld $\phi(r)$, $E(r)$
- $\vec{f}(x)$: Raumkurve, $\vec{x}(t)$, $\vec{v}(t)$
- $\vec{f}(\vec{r})$: Vektorfeld, $\vec{F}(r)$, $\vec{E}(r)$

Ableiten eines Vektors: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} x_i(t)\, \vec{e}_i$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i(t)\, \vec{e}_i \qquad (7.1)$$

- $\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} A_1(\vec{r}) \\ A_2(\vec{r}) \\ A_3(\vec{r}) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} A_i(\vec{r})\, \vec{e}_i \quad \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x A_1(\vec{r}) \\ \partial_x A_2(\vec{r}) \\ \partial_x A_3(\vec{r}) \end{pmatrix}$

$$= \sum_{i=1}^{3} \partial_x A_i(r)\, \vec{e}_i$$

<u>Bem:</u> Mittels Kettenregel erhalten wir das Verhalten von den vektoriellen Produkten:

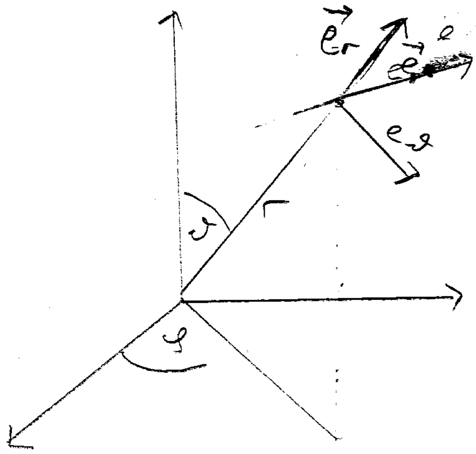
- $$\frac{d}{du}\left(\phi\, \vec{a}\right) = \phi\, \frac{d\vec{a}}{du} + \left(\frac{d\phi}{du}\right)\vec{a}$$

- $$\frac{d}{du}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{du} + \left(\frac{d\vec{a}}{du}\right)\cdot\vec{b} \qquad (7.2)$$

- $$\frac{d}{du}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \left(\frac{d\vec{a}}{du}\right)\times\vec{b} + \vec{a}\times\left(\frac{d\vec{b}}{du}\right)$$

<u>Bsp:</u> Kugelkoordinaten:

$$\vec{r}(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \vec{e}_r = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\vartheta = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ -r\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

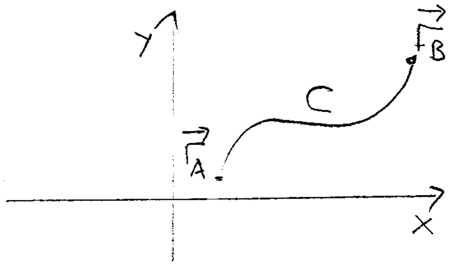
$\Rightarrow$ · $|\vec{e}_\varphi| = |\vec{e}_\vartheta| = r$

· $|\vec{e}_r| = 1$

· $\vec{e}_r\cdot e_\varphi = \vec{e}_r\cdot\vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_\vartheta = 0$

7. 1. Linien- und Oberflächen Integrale

Ein Linienintegral ist gegeben durch Ausdrücke von der Form



$$I = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{A}(x,y,z)$$

wobei C eine Kurve im Raum darstellt.
Die Kurve ist parametrisiert durch einen Parameter t

$$[t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto \vec{r}(t) \qquad \text{mit } \vec{r}(t_0) = \vec{r}_A \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_B$$

Die Berechnung des Linienintegrals erfolgt dann mittels

$$d\vec{r} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) \cdot dt$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{d}{dt}\vec{r}(t)\right] \cdot \vec{A}(\vec{r}(t))$$

Bsp: · Die Arbeit entlang eines Weges $\vec{r}(t)$ im Kraftfeld $F(\vec{r})$

$$W = \int_C d\vec{r}\, \vec{F}(\vec{r})$$

Bem: Das Integral ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve C:

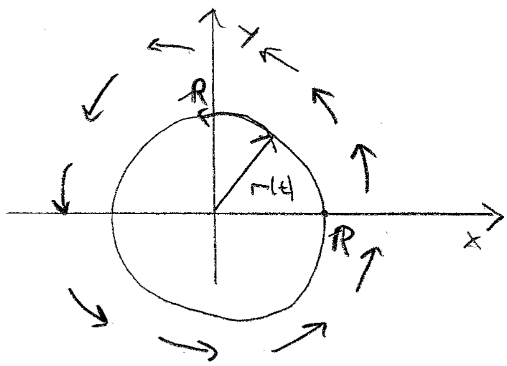
$$t = f(s) \quad \Longrightarrow \quad \vec{r}(f(s)) \equiv \vec{\tilde{r}}(s)$$

$$\Longrightarrow \quad I = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right] \cdot \vec{A}(\vec{r}(t))$$

$$\overset{\substack{dt = f' ds \\ t = f(s)}}{=} \int_{s_0}^{s_1} ds \underbrace{f' \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]}_{\frac{d\vec{\tilde{r}}}{ds}} \cdot \vec{A}(\vec{\tilde{r}}(s))$$

Bsp:

- $\vec{F} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$



- $\vec{r}(\varphi) = R\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

$$\frac{d}{d\varphi}\vec{r} = R\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

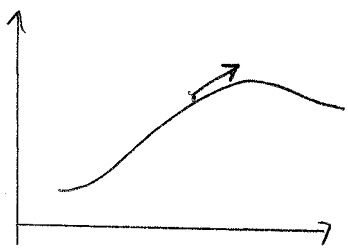
$$\Longrightarrow \quad I = \int_0^{2\pi} d\varphi \, R\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \frac{R}{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) R^2}}^{\vec{F}(r(\varphi))}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \quad = 2\pi$$

Bem: Weitere Linien Integrale:

- $\int_C d\vec{r} \cdot f(\vec{r}) = \int_{t_0}^{t_1} dt\; f(\vec{r}(t))\, \frac{d\vec{r}}{dt}$: Vektorgrösse

- Bogenlänge:

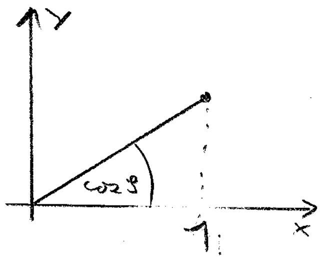


$$\int_C ds = \int_{t_0}^{t_1} dt\; \left|\frac{dr(t)}{dt}\right|$$

$\Longrightarrow$ · $\int_C ds\; \phi(r)$: Skalare grösse

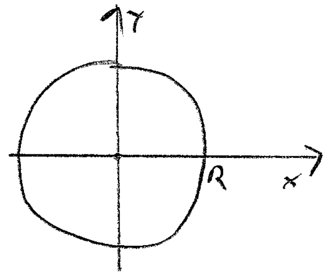
· $\int_C ds\; \vec{F}(r)$: Vektor grösse

Bsp: · Länge einer Geraden



$$r(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin\varphi \cdot t \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\int_C ds = \int_0^1 dt\, \sqrt{1+\sin\varphi^2} = \sqrt{1+\sin^2\varphi}$$



· Umfang eines Kreises: $r(\varphi) = R\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

$$L = \int_C ds = \int_0^{2\pi} d\varphi\; R\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}$$

$$= R \cdot 2\pi$$

Eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ können wir darstellen mit Hilfe von 2 Parameter

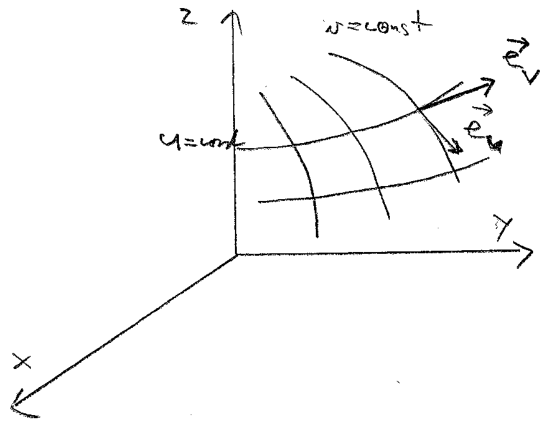
$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

Bsp: · Eine Ebene aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch den Punkt $\vec{r}_0$ hat die Form

$$\vec{r}(u,v) = \vec{r}_0 + u\,\vec{a} + v\,\vec{b}$$

· Eine Kugel mit Radius R:

$$\vec{r}(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$



Die Vektoren $\vec{e}_u = \frac{\partial}{\partial u}\,\vec{r}(u,v)$

$\vec{e}_v = \frac{\partial}{\partial v}\,\vec{r}(u,v)$

beschreiben die Tangenten Vektoren an die Linien auf der Fläche mit v=const und u=const.

Das Flächendifferenzial dA in einem Punkt hat somit die Form

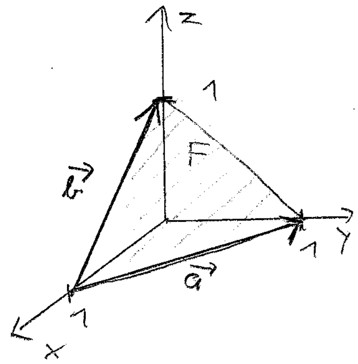
$$dA = \left| \vec{e}_u(u,v) \times \vec{e}_v(u,v) \right| \overset{du\,dv}{=} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \right| du\,dv$$

Somit ist die Flächeninhalt einer Fläche in $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F_B = \iint_B du\,dv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \right|$$

<u>Bsp:</u> · Darstellung der Fläche

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \vec{e}_u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ +1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3}$$

$$F_B = \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \, \sqrt{3} = \int_0^1 dv \, \sqrt{3}\,(1-v) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bei einem Oberflächenintegral wird jetzt jeder Punkt auf der Oberfläche mit einer Funktion gewichtet

$$\int_S dS\ \phi(\vec r) \quad = \int_B du\,dv\ \phi(\vec r(u,v))\ \left|\frac{\partial \vec r}{\partial u}\times\frac{\partial \vec r}{\partial v}\right|$$

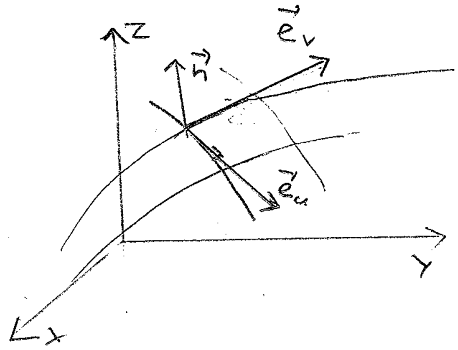
: skalares Integral

Es ist jedoch auch möglich vektorielle Oberflächenintegrale zu definieren. Insbesondere ist das Oberflächenelement

$$d\vec A = \frac{\partial \vec r}{\partial u}\times\frac{\partial \vec r}{\partial v}\, du\,dv = \vec n\ dA$$

eine Vektorgrösse, wobei der Einheitsvektor $\vec n$ senkrecht auf der Oberfläche steht.

$$\vec n = \frac{\frac{\partial \vec r}{\partial u}\times\frac{\partial \vec r}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \vec r}{\partial u}\times\frac{\partial \vec r}{\partial v}\right|}$$



Die Richtung von $\vec n$ hängt von der Orientierung der Oberfläche ab.
Bei geschlossenen Flächen, wie z.B. die Kugel wird die Orientierung normalerweise so gewählt, dass $\vec n$ nach aussen zeigt.

Bsp: Kugel: $\vec{r}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\varphi \sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\vartheta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin^2\vartheta \\ \sin\varphi \sin^2\vartheta \\ \cos\vartheta \sin\vartheta \end{pmatrix} = \sin\vartheta \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$|\vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi| = |\sin\vartheta|$$

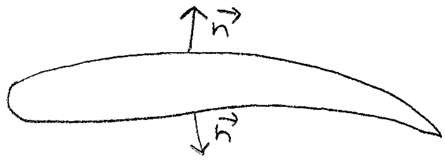
$$\Longrightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = \vec{r}(\vartheta, \varphi)$$

Wir finden jetzt die weiteren Oberflächenintegrale

$$\int_S d\vec{S} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_B du\,dv \; \vec{F}(u,v) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)$$: skalare Grösse

$$\int_S d\vec{S} \; \phi(\vec{r}) = \int_B du\,dv \; \phi(u,v) \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)$$: vektor Grösse

$$\int_S d\vec{S} \times \vec{F}(r) = \int_B du\,dv \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \times \vec{F}(u,v)$$: Vektor Grösse



Bsp: · Der Tragflügel eines Flugzeugs erzeugt durch seine Form und den Luftfluss verschiedene Drucke auf der Oberseite und Unterseite.
Bezeichnen wir mit $p(\vec{r})$ das erzeugte Druckfeld so ist der Auftrieb des Flugzeugs gegeben durch

$$\vec{F} = \int_S d\vec{S}\; p(r)$$

: wobei S die Oberfläche der Tragflächen ist

· Eine Flüssigkeit fliesst mit einem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r})$. D.h, in jedem Punkt $\vec{r}$ ordnen wir die lokale Geschwindigkeit der Flüssigkeit zu. Zudem hat sie eine Massendichte $\rho(r)$.

· Die totale Masse die pro Zeit Einheit durch eine Oberfläche fliesst ist gegeben durch:

$$M = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{v}(\vec{r}) \cdot \rho(\vec{r})$$

7.2 Ableitungs Operatoren

Gradient: Ein Skalarfeld $\phi(\vec{r})$ ordnet jedem Punkt $\vec{r}$ im Raum eine reele Zahl zu.

Der Gradient des Skalarfeldes ist dann definiert als

$$\nabla \phi(\vec{r}) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Somit ist $\nabla \phi(\vec{r})$ ein Vektorfeld. In seinen Komponenten hat es die Form (in der natürlichen Basis)

$$\nabla \phi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x \phi \\ \partial_y \phi \\ \partial_z \phi \end{pmatrix}$$

Das verhalten des Skalarfeldes um einen Punkt $\vec{r}_0$ lässt lässt sich dem gradienten sehr einfach beschreiben

$$\vec{r}(s) = \vec{r}_0 + s\,\vec{a}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\,\phi(\vec{r}(s))}{ds} = \vec{a} \cdot \nabla \phi(\vec{r}_0) \quad : \text{Richtungsableitung.}$$

Der Gradient zeigt somit in die Richtung der stärksten Zunahme des Skalarfeldes.

Die Gleichung $\phi(\vec{r}) = \text{const}$ bestimmt eine Fläche in $\mathbb{R}^3$, wobei der Gradient immer senkrecht auf dieser Fläche steht.

Der Name Ableitungs-Operator kommt von der Eigenschaft, dass jedem Skalar Feld ein Vektorfeld zugeordnet ist. Daher schreibt man auch oft

$$\nabla = \partial_x \vec{e}_x + \partial_y \vec{e}_y + \partial_z \vec{e}_z$$

wobei für jedes Skalarfeld gilt

$$\nabla \phi(\vec{r}) = \left(\partial_x \vec{e}_x + \partial_y \vec{e}_y + \partial_z \vec{e}_z \right) \phi(r)$$

$$= \partial_x \phi \, \vec{e}_x + \partial_y \phi \, \vec{e}_y + \partial_z \phi \, \vec{e}_z$$

Bsp: · $\phi(x,y,z) = xyz \qquad \nabla \phi = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ yx \end{pmatrix}$

· $\phi(x,y,z) = MmG \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$: Gravitationspotential

$\Longrightarrow F_g = -\nabla \phi = MmG \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: Gravitationskraft

<u>Divergenz:</u> Betrachte ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$, dass jedem Punkt $\vec{r}$ einen Vektor zuordnet.

Die Divergenz von $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ ist definiert als

$$\operatorname{div} \vec{A} \equiv \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Die div eines Vektorfeldes beschreibt physikalisch Quellterme / ~~Source~~ - terme:

- Die Divergenz des $\vec{E}$-Feldes verschwindet wenn keine Ladungen vorhanden sind: $\operatorname{div} \vec{E} = 0$

- Für das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(r)$ und Massendichte $\rho(r)$ einer fliessenden Flüssigkeit / Gas gilt:

  $$\operatorname{div} \left[\rho(r) \, \vec{v}(\vec{r}) \right] = 0$$

  wenn keine Quelle / Abfluss vorhanden ist.

<u>Bsp:</u>

- $\vec{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{A} = 3$

- $\vec{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{A} = 0$

Laplace Operator:

Die Kombination von Gradient und Divergenz ergibt den Laplace Operator für ein Skalarfeld $\phi(\vec{r})$

$$\Delta\, \phi(\vec{r}) = \operatorname{div} \nabla \phi(\vec{r}) = \partial_x^2 \phi + \partial_y^2 \phi + \partial_z^2 \phi$$

Bsp: · Gravitationspotential: $\phi(\vec{r}) = G m M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\Longrightarrow \Delta\, \phi(\vec{r}) = 0 \qquad \text{für } \vec{r} \neq 0$$

Da aber bei $\vec{r}=0$ eine Quelle / Masse sitzt die ein Gravitationsfeld erzeugt, sollte also $\operatorname{div} \nabla \phi(r)$ bei $\vec{r}=0$ nicht verschwinden.
In der Tat gilt:

$$\Delta\, \phi(r) = 4\pi M m G \overbrace{\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)}^{\delta(\vec{r})}$$

mit der bekannten δ-Funktion.

Rotation: Die Rotation ist definiert für ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ mittels

$$\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

$$= \vec{e}_x\left(\partial_y A_z - \partial_z A_y\right) + \vec{e}_y\left(\partial_z A_x - \partial_x A_z\right) + \vec{e}_z\left(\partial_x A_y - \partial_y A_x\right)$$

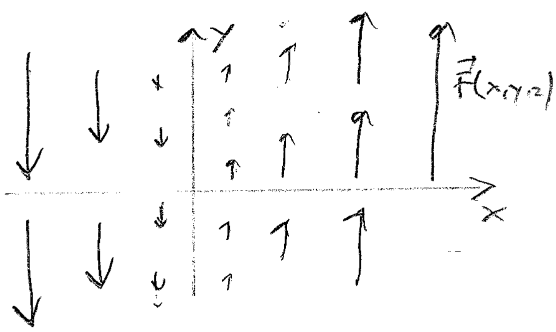
$$= \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}$$

und ist somit wieder ein Vektorfeld.

Die physikalische Interpretation ist, dass die Rotation Wirbel / Drehungen beschreibt:

- Betrachte das Kraftfeld $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ein Objekt das wir in ein solches Feld platzieren beginnt sich um seine eigene Achse zu drehen.



$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: Drehachse des Objektes.

Bem: • Für ein Skalarfeld $\phi(\vec{r})$ gilt:

$$\text{rot}\ \nabla\phi(\vec{r}) = 0$$

$$\left[\text{rot}\begin{pmatrix} \partial_x\phi \\ \partial_y\phi \\ \partial_z\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_z\partial_y\phi + \partial_y\partial_z\phi \\ \partial_z\partial_x\phi - \partial_x\partial_z\phi \\ \partial_x\partial_y\phi - \partial_y\partial_x\phi \end{pmatrix} = 0 \right]$$

• Für ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ gilt

$$\text{div rot}\ \vec{A}(\vec{r}) = 0$$

Zudem sind folgende Relationen einfach zu beweisen

$$\nabla\cdot(\phi\vec{A}) = (\nabla\phi)\cdot\vec{A} + \nabla\cdot\vec{A}$$

$$\nabla\times(\phi\vec{A}) = (\nabla\phi)\times\vec{A} + \phi(\nabla\times\vec{A})$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$

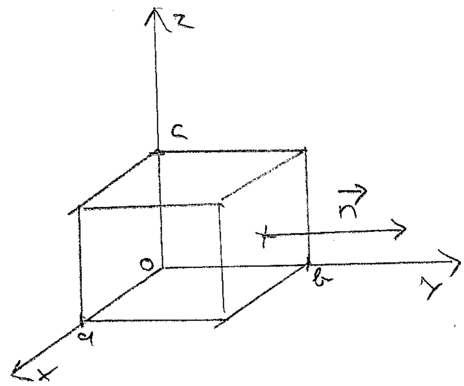
$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

7.3 Gausssche Integralsatz

Die Integralsätze stellen einen Zusammenhang her zwischen den Ableitungsoperatoren und den Oberflächenintegralen. Der Gausssche Integralsatz besagt

$$\int_V dV \,\mathrm{div}\,\vec{A} = \int_{S=\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{A} = \int_{S=\partial V} dS\; \vec{n}\cdot\vec{A}$$

wobei ∂V die Oberfläche des Volumen V beschreibt mit $\vec{n}$ senkrecht auf der Oberfläche steht und nach aussen zeigt.



Für V ein Quader gilt

$$\int_V dV \,\mathrm{div}\,\vec{A}$$

$$= \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz \left[\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z\right]$$

$$= \int_0^b dy \int_0^c dz\; A_x(a,y,z) - \int_0^b dy \int_0^c dz\; A_x(0,y,z)$$

$$+ \int_0^a dx \int_0^c dz\; A_y(x,b,z) - \int_0^a dx \int_0^c dz\; A_y(x,0,z) \quad : \text{Oberflächenintegrale über die 6 Seiten}$$

$$+ \int_0^a dx \int_0^b dy\; A_z(x,y,c) - \int_0^a dx \int_0^b dy\; A_z(x,y,0)$$

$$= \int_{\partial V = S} d\vec{S}\cdot\vec{A}\,.$$

Für allgemeine Volumen folgt der Satz durch zerlegen des Volumens in kleine Quader und mittels einem Grenzwert

<u>Bem:</u> Falls das umschlossene Gebiet Löcher aufweist, so müssen diese Löcher bei der Bestimmung des Randes berücksichtigt werden.

<u>Bsp:</u> · Betrachte das Vektorfeld

$$\vec{A} = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \implies \operatorname{div} \vec{A} = 3$$

mit dem V ~~diese~~ Kugel mit Radius R.

$$\implies \cdot \int_V d\vec{r} \, \operatorname{div} \vec{A} = 3 \, \frac{4\pi}{3} R^3 = 4\pi R^3$$

$$\cdot \int_S dS \, \vec{n} \cdot \vec{r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \, \sin\vartheta \cdot R^3 = 4\pi R^3$$

· Kontinuitätsgl.: Der Änderung der Teilchenzahl von einer Flüssigkeit im Volumen V hat die Form

$$\partial_t N_V(t) = \partial_t \int_V d\vec{r} \, \rho(\vec{r}, t) = \int_V d\vec{r} \, \partial_t \rho(\vec{r}, t) \qquad \rho(\vec{r}, t): \text{Teilchendichte}$$

Teilchenfluss aus dem Volumen: $\displaystyle\int_{\partial V = S} d\vec{S} \cdot \underbrace{\rho(r,t) \, \vec{v}(\vec{r}, t)}_{j(r,t)\,:\ \text{Teilchenstrom}}$

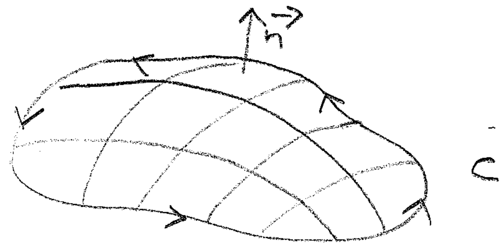
$$\implies \partial_t N_V(t) = \int_V d\vec{r} \, \partial_t \rho(\vec{r}, t) = - \int_{\partial V = S} d\vec{S} \, \vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$= - \int_V d\vec{r} \, \operatorname{div} \vec{j}(r, t) \qquad : \text{gilt für alle Volumen } V$$

$$\implies \partial_t \rho(\vec{r}, t) + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$$

7.4. Integralsatz von Stokes

Der Satz von Stokes verbindet Oberflächenintegrale mit Linienintegralen entlang der Begrenzungslinie der Oberfläche. Für ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ gilt



$$\int_S d\vec{S} \cdot \left(\text{rot}\,\vec{A}(\vec{r})\right) = \int_{C=\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

Dabei bilden der Normalenvektor $\vec{n}$ auf der Oberfläche mit dem Umlaufrichtung der Linie C eine rechtshändige Schraube

Bem.: · Die Fläche soll orientierbar sein, der Satz ist nicht anwendbar auf ein Möbiusband.

· Für ein Vektorfeld mit $\text{rot}\,\vec{A} = 0$ gilt somit, dass alle geschlossenen Linien Integrale verschwinden

$$\int_C d\vec{r}\,\vec{A}(\vec{r}) = 0$$

$\Rightarrow$ Man kann jedoch nun zeigen dass somit ein Skalar Feld ϕ existiert, mit

$$\vec{A}(\vec{r}) = \nabla\phi(\vec{r})$$

7.5 Anwendung: Coulomb Potential

Eine homogen gefüllte Kugel mit Masse M erzeugt ein Gravitationspotential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\alpha}{|r|}$$

: $\alpha = M m G$

: $|r| > R$ Radius der Kugel

: $M = \frac{4\pi}{3} R^3 \varrho$

Mittels dem Gradienten erzeugt dies das Gravitationskraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla \phi(\vec{r}) = \alpha \frac{\vec{r}}{|r|^3}$$

Weiter gilt, dass $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \neq 0$.
Es bleibt somit die Frage, was bei $\vec{r} = 0$ passiert, und andererseits macht das Resultat keinen Sinn für $|r| < R$, da sich innerhalb der Kugel das Potential verändert. Der Satz von Gauss besagt aber:

S : kein Kugel mit Radius $L > R$

$|r| = L$

$$\int_S d\vec{S} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \; \alpha \cdot \frac{\vec{r}}{|r|} \cdot \frac{\vec{r}}{|r|^3} \cdot |r|^2$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \; \alpha = 4\pi\alpha$$

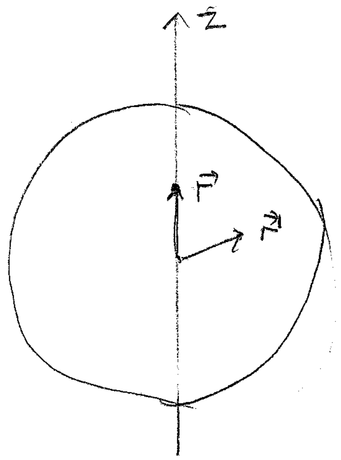
: unabhängig von L

Satz von Gauss

$$= \int_V d\vec{r} \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r})$$

: Also muss die $\operatorname{div} \vec{F}$ innerhalb des massiven Körpers gerade so sein, dass es die Konstante $4\pi\alpha$ ergibt.

– 7.21 –



Der Körper hat eine homogene Massendichte und daher lässt sich das Potential schreiben

$$\phi(\vec r) = \int_V d\vec r\,' \; \frac{3\alpha}{4\pi R^3} \; \frac{1}{|r - r'|}$$

Für $|r| > R$ ergibt dies $\phi(\vec r) = \frac{\alpha}{|r|}$, aber innerhalb des Körpers wird das Potential zu

$$\phi(\vec r) = \begin{cases} \frac{3}{2}\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha}{2}\frac{|r|^2}{R^3} & |r| < R \\ \frac{\alpha}{|r|} & |r| > R \end{cases}$$

und das Gravitationskraftfeld wird zu

$$\vec F(\vec r) = -\nabla\phi(\vec r) = \begin{cases} \alpha \frac{\vec r}{|R^3|} & |r| < R \\ \alpha \frac{\vec r}{|r|^3} & |r| > R \end{cases}$$

und die Divergenz

$$\operatorname{div} \vec F(\vec r) = \begin{cases} \frac{3\alpha}{R^3} & |r| < R \\ 0 & |r| > R \end{cases}$$

Der Satz von Gauss ist somit erfüllt für den realen Fall einer homogenen Kugel.

Um jetzt das Verhalten einer reinen Punktladung zu untersuchen, lassen wir den Radius der Kugel gegen Null gehen, behalten die Masse aber konstant:

- Im limes $R \to 0$ konvergiert $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r})$ aber gegen eine 3-dimensionale δ-Funktion

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) \xrightarrow[R \to 0]{} 4\pi\, \delta(\vec{r})$$

⌈ $\int d\vec{r}\, \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = 4\pi$ unabhängig von R, und für $R \to 0$ ist alles Gewicht in einer kleinen Kugel um den Ursprung. ⌋

Somit gilt für das Potential einer punktförmigen Masse

- $$\phi(\vec{r}) = \frac{\alpha}{|\vec{r}|} \qquad \vec{F}(\vec{r}) = \alpha \frac{\vec{r}}{|r|^3}$$

- $$\Delta \phi(\vec{r}) = -4\pi\alpha\, \delta(\vec{r})$$

Bem: In der Elektrostatik hat das Potential eines geladenen Punktteilchens (Elektron / Proton) ebenfalls das Potential $\phi(\vec{r}) \sim \frac{1}{|\vec{r}|}$. Daher der Name Coulomb Potential