3. Vektoren

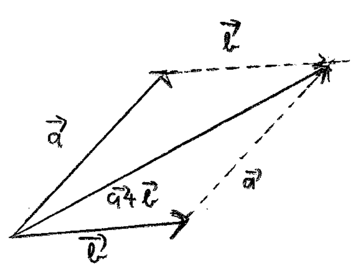
Skalar: Physikalische Grössen, die nur von ihrer grösse abhängen:

- T: Temperatur p: Druck
- m: Masse
- $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$: Feinstruktur konstante

Vektor: Physikalische grössen, die durch ihren Betrag und Richtung bestimmt sind:

- $\vec{v}$: Geschwindigkeit
- $\vec{F}$: Kraft
- $\vec{E}$: elektrischer Feld

Einen Vektor stellen wir durch einen Pfeil im Raum dar mit seiner Länge bestimmt durch seinen Betrag



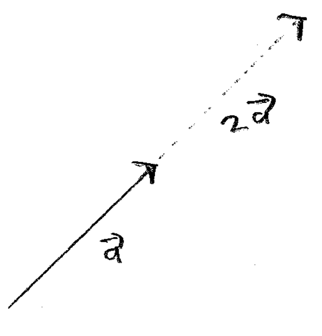
Adittion: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$: communtative

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$: associative

Skalare multiplikation: $\lambda \cdot \vec{a}$ (3.1)

$$(\lambda+\mu)\,\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\,\vec{a}$$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$



3.1 Basis vektoren

Für 3 beliebige Vektoren die nicht in einer Ebene liegen, können wir jeden Vektor darstellen als

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \qquad (3.2)$$

Die drei Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ formen eine Basis; die Skalare a_1, a_2, a_3 heissen die Komponenten des Vektors $\vec{a}$ zu dieser Basis.

<u>Bem:</u> Meistens werden die Basis Vektoren orthogonal aufeinander gewählt, aber es ist nicht notwendig.

Im allgemeinen gilt:

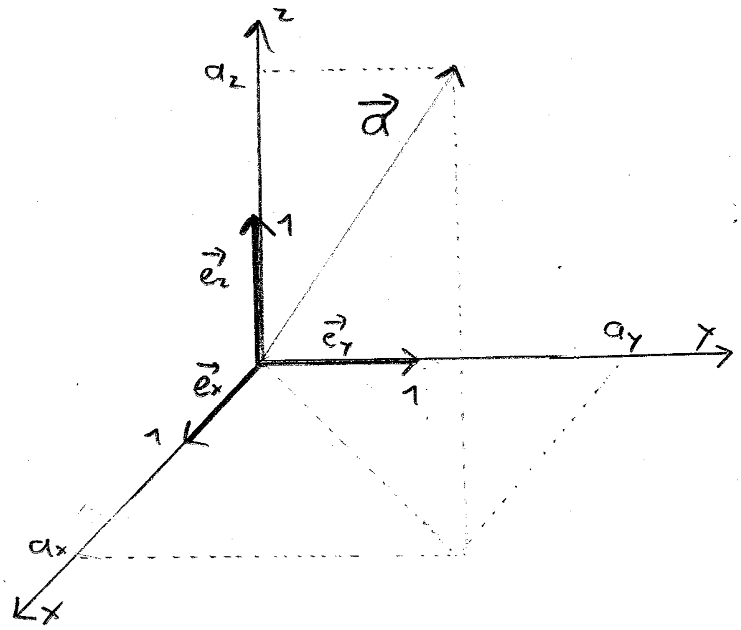
(i) Die Anzahl Vektoren in der Basis ist bestimmt durch die Dimension des Raumes.

(ii) Die Vektoren in der Basis sind linear unabhängig, d.h., (3.3)

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots c_n e_3 \neq 0$$

für alle c_i, ausser $c_i = 0$.

Im 3-dimensionalen Cartesischen Koordinatensystem (x, y, z) haben wir die natürliche Basis der Einheitsvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ entlang der x, y, z Achsen



$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

Für eine gewählte Basis, können wir somit jeden Vektor in seinen Komponenten schreiben

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad (3.4)$$

Die Addition und skalare Multiplikation hat in Komponentenschreibweise die Form:

- $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

(3.5)

- $\lambda \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$

3.2 Skalar Produkt und Betrag

Das Skalar Produkt im drei-dimensionalen cartesischen Raum ist definiert durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{3.6}$$

und das Skalar Produkt eines Vektors mit sich selber bestimmt seinen Betrag

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{3.7}$$

Für die natürliche Basis $\vec{e}_x, \vec{e}_y\ \vec{e}_z$ folgt somit

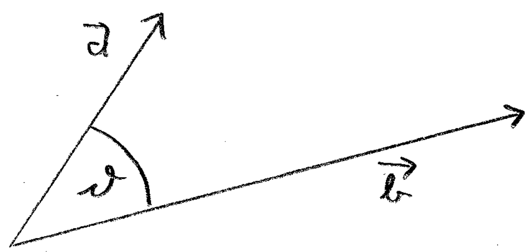
$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0 \qquad \text{orthogonal}$$

$$|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1 \qquad \text{normiert}$$

Bem: Die Basis heisst orthonormiert.

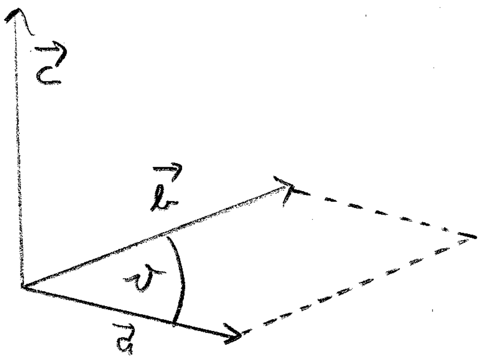
Das Skalarprodukt kann auch geschrieben werden als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a|\,|b| \cos\vartheta$$



mit ϑ der Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

3.3 Vektorprodukt



Das Vektorprodukt wird geschrieben als

$$\vec c = \vec a \times \vec b$$

wobei $\vec c$ orthogonal auf $\vec a$ und $\vec b$ steht, mit dem Betrag

$$|c| = |a|\,|b| \sin\vartheta \qquad \text{; Fläche des Parallelogrammes}$$

Zudem bilden $\vec a, \vec b, \vec c$ ein rechtshändiges Dreibein.

Es gilt:

$$\begin{aligned} (\vec a + \vec b) \times \vec c &= \vec a \times \vec c + \vec b \times \vec c \\ \vec b \times \vec a &= - \vec a \times \vec b \end{aligned} \qquad (3.8)$$

In den Koordinaten der natürlichen Basis $\vec e_x, \vec e_y, \vec e_z$ hat das Vektorprodukt die Form

$$\vec a \times \vec b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \vec c \qquad (3.9)$$

Bsp: Bewegung eines Massenpunktes $\vec r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

Geschwindigkeit: $\vec v = \frac{d}{dt} \vec r(t) = \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \\ \dot z \end{pmatrix}$

Drehimpuls: $\vec L = m (\vec r \wedge \vec v)$

Lorentz Kraft: $\vec F = q \big(\underbrace{\vec E}_{\text{el. Feld}} + \vec v \wedge \underbrace{\vec B}_{\text{Magnetfeld}} \big)$