Theoretische Physik IIa, Übungsblatt 2

Prof. Alejandro Muramatsu SS 2010, 27. April 2010

Aufgabe 1: Greens-Funktion der Laplace-Gleichung (3 Punkte)

Beweise die Relation

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{1}$$

Definition der Dirac'schen δ-Funktion: Die δ-Funktion ist keine Funktion im eigentlichen Sinne, sondern eine verallgemeinerte Funktion. Sie lässt sich ber die zwei Eigenschaften

$$\delta(x - a) = 0 \text{ für } x \neq a \tag{2}$$

und

$$\int dx\, \delta(x - a) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = a \text{ im Integrationsgebiet liegt,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{3}$$

definieren. Ausführlicher ist die Dirac'sche δ-Funktion im Jackson (Kapitel 1.2) beschrieben.

Tipp: Zeige, dass für $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ die linke Seite Null ergibt, und verwende den Satz von Gauss, um das Integral über die Region mit $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ zu bestimmen.

Aufgabe 2: Eindeutigkeit der Randbedingungen (5 Punkte)

Zeige, dass die Lösungen von $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$ eindeutig durch die Randbedingungen gegeben sind.

Tipp: Nimm an, dass ϕ_1 und ϕ_2 Lösungen von $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$ sind, und damit auch $\chi = \phi_1 - \phi_2$. Verwende weiterhin eine der Green'schen Identitäten um zu zeigen, dass die Randbedingungen für die Eindeutigkeit ausreichen.

Aufgabe 3: Eindeutigkeit der Randbedingungen (6 Punkte)

Wir betrachten eine geerdete leitende Kugel mit Radius R. Im abstand $x > R$ befinde sich nun eine Ladung q. Wie sieht das Potential ϕ dieser Anordnung aus?

Tipp: Verwende Spiegelladungen und Symmetrie.