Theoretische Physik IIa, Übungsblatt 3

Prof. Alejandro Muramatsu SS 2010, 4. Mai 2010

Aufgabe 1: Randwertproblem **(9 Punkte)**

Gegeben ist das zweidimensionale Randwertporblem aus Abbildung 1. Innterhalb des weissen Bereichs gelte die Laplace-Gleichung $\Delta\phi = 0$. Die Randbedingungen sind wie in der Abbildung angegeben.

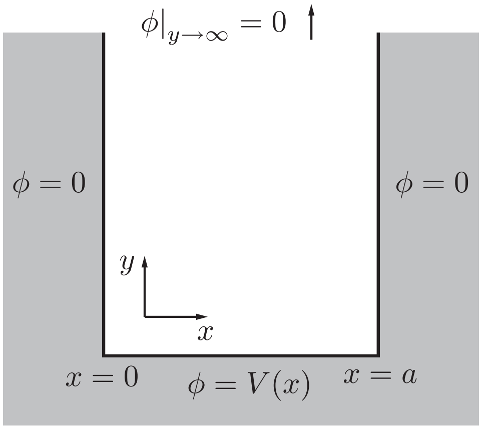

Abbildung 1: Randbedingungen für das zweidimensionale Laplace-Problem.

a) Zeige, dass der Separationsansatz $\phi(x, y) = X(x)Y(y) = Ce^{\pm ikx}e^{+ky}$ eine Lösung der Laplace-Gleichung ohne Randbedingungen ist.

b) Welche Einschränkung gilt für k, wenn die Randbedingung $\phi = 0$ für $y \to \infty$ gelten soll.

c) Finde nun Einschränkungen zur allgemeinen Lösung durch die Randbedingungen $X(x = 0) = X(x = a) = 0$.

Tipp: $e^{+ikx} - e^{-ikx} = 2i\sin(kx)$.

d) Berechne

$$\int_0^a dx \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \tag{1}$$

für $n, m \in \mathbb{N}$.

Verwende das Ergebnis, um durch Addition von Lösungen auch die Randbedingung $\phi(x, y = 0) = X(x) = V(x)$ zu erfüllen.

Tipp: Vollständiges Funktionensystem, Fourier-Transformation.

e) Betrachte nun den Spezialfall $V(x) = V = const.$ Nähere die erhaltene Lösung, indem nur die ersten 5, 10, 100 Terme der Summe mitgenommen werden.

f) Vergleiche die Näherungslösung mit der exakten Lösung

$$\phi(x,y) = \frac{2V}{\pi} \arctan\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{a}}{\sinh\frac{\pi y}{a}}\right). \tag{2}$$

Plotte dazu die exakte und die genährte Lösung (Mathematica, Maple, Matlab, ...).

Aufgabe 2: Dipole **(6 Punkte)**

a) Skizziere das Potential und das Elektrische Feld eines Dipols.

b) Berechne die Kraft auf einen Dipol durch ein externes elektrisches Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ über

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\mathbf{E}(\mathbf{r}+\mathbf{a}) \tag{3}$$

und eine Entwicklung um $\mathbf{a} = 0$, wobei $q\mathbf{a} = \mathbf{p} = const.$ gelte.

c) Spezialisiere das Ergebnis auf $\mathbf{E} = const.$

d) Leite auf die gleiche Weise das Drehmoment $\mathbf{M}$ auf den Dipol

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \tag{4}$$

in führender Ordnung in a her.

e) Berechne $\nabla(\mathbf{pE})$, und schreibe mit dem Ergebnis die Kraft als negativen Gradient eines Potentials V um, also $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$.

f) Wie stehen im Fall geringster Energie Dipol und Feld zueinander?