Theoretische Physik II: Quanten Mechanik, Übung 1

Prof. Hans Peter Büchler WS 2009, 22. Oktober 2009

Informationen zur Vorlesung sowie eine elektronische Version der Übungen und eine Kopie der Vorlesungsnotizen befinden sich auf der Homepage **http://www.theo3.physik.uni-stuttgart.de/lehre/ws09/qm1/**. Die Übungen sind in zwei verschiedene Aufgabentypen aufgeteilt: **Schriftlich** heisst, dass diese Aufgaben am Dienstag morgen in der Vorlesung abgegeben werden und von den Übungsassistenten korrigiert werden. Die Aufgaben markiert mit **Übungsstunde** sollen vorbereitet werden für die Übungsstunde und von einem Studenten vorgelöst werden. Zum erlangen des Scheines sollen 80% der Übungen sinnvoll bearbeitet werden, und es muss mindestens einmal in der Übungsstunde vorgerechnet werden.

1. **Teilchen-Wellen Dualität (Übungsstunde)**

   Zeige, dass für Elektronen

   $$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}} \approx \frac{12.2\ \text{Å}}{\sqrt{E\ (\text{eV})}} \tag{1}$$

   gilt. Berechne dasselbe für ein Proton.

2. **Einsteins Herleitung des Planckschen Gesetzes (Physik. Z. 18, S. 121, 1917) (Übungsstunde)**

   Betrachte einen Hohlraum mit Strahlung der spektralen Energiedichte $u(\omega, T)$. Zudem enthält der Hohlraum Gasmoleküle mit Energieniveau's E_n. Die Wahrscheinlichkeit, ein gegebenes Molekül im Energieniveau E_n vorzufinden ist durch die Boltzmann Verteilung $P_n = Z^{-1} e^{-E_n/k_B T}$ gegeben (Z ist die Zustandssumme). Für die Zahl der Moleküle, die pro Zeiteinheit den Übergang $E_n \to E_m$ machen (unter Absorption bzw. Emission eines Photons), setzt Einstein

   $$W_{nm} = P_n \cdot \begin{cases} B_{nm} u(\omega_{nm}) + A_{nm} & E_n > E_m \quad \text{Emission} \\ B_{nm} u(\omega_{mn}) & E_n < E_m \quad \text{Absorption} \end{cases} \tag{2}$$

   wobei $\hbar\omega_{nm} = E_n - E_m$. Des weiteren sind $B_{nm} u(\omega_{nm})$ bzw. A_{nm} die Übergangs wahrscheinlichkeiten pro Zeiteinheit für strahlungsinduzierte Emission/Absorption bzw. für spontane Emission.

   Im Gleichgewicht gilt $W_{nm} = W_{mn}$. Leite damit einen Ausdruck für die spektrale Energiedichte u her. Dieser Ausdruck muss im Limes $T \to \infty$ das Rayleigh-Jeans Gesetz

   $$u(\omega, T) = \frac{k_B T}{\pi^2 c^3}\omega^2 \tag{3}$$

   ergeben. Zeige, dass unter dieser Bedingung die spektrale Energiedichte gerade die Form des Planckschen Strahlungsgesetzes annimmt.

3. Bohr-Sommerfeld Quantisierung Übungsstunde)

a) Die Bohr-Sommerfeld Quantisierung ist durch die Bedingung

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \oint p dq = \hbar(n+\alpha) \quad n = 0, 1, 2 \dots \tag{4}$$

gegeben. Wende diese auf den harmonischen Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \tag{5}$$

in 1 und 2 Dimensionen an, i.e. finde die Quantisierung der Energieniveau's. Separiere in 2D die Variablen $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ in die Paare (p_x, q_x), (p_y, q_y) und kommentiere die Entartungen.

Fakultativ: Beachte, dass in 2D die Variablen $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ auf verschiedenen Arten separiert werden können: (I) (p_x, q_x), (p_y, q_y) und (II) (p_r, r), (p_θ, θ). Vergleiche die Quantisierungen in beiden Fällen.

b) **Aharonov-Bohm Effekt:** Betrachte nun ein Elektron, das sich "frei" auf einer kreisförmigen Bahn bewegt. Zusätzlich wird ein magnetisches Feld, mit Vektorpotential $\mathbf{A}$, durch die Bahn angelegt. In diesem Fall ist der Hamiltonoperator gegeben durch

$$H = \frac{\Pi^2}{2m}, \qquad \Pi = p - \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_\theta, \tag{6}$$

wobei $\mathbf{e}_\theta$ der Einheitsvektor tangential zur Kreisbahn ist. Π ist die konjugierte Variable zu q und geht somit in die Bohr-Sommerfeld Quantisierung ein. Wie hängt das Spektrum der kinetischen Energie ($E_{\text{kin}} = p^2/2m$) vom magnetischen Fluss durch die Bahn ab. Zeige, dass dies ein Flussquantum $\Phi_0 = hc/e$ definiert.