

Theoretische Physik II: Quanten Mechanik, Übung 11

Prof. Hans Peter Büchler WS 2009, Abgabe 19. Januar 2010

1. Dichtematrix (Schriftlich)

- (a) Ein Strahl von Spin-1-Teilchen falle auf die modifizierten Stern-Gerlach-Apparate (α) und (β). Der Spinzustand des Strahls sei dabei gegeben durch die Dichtematrix $\rho_0 = \frac{1}{3}\mathbb{1}$. Wie lautet der Dichteoperator ρ_α bzw. ρ_β für den Strahl, nachdem er die den Apparat (α) bzw. (β) passiert hat? Zeige, dass für die Dichteoperatoren $\text{Tr } \rho_{\alpha/\beta} = 1$ sowie $\text{Tr } \rho_{\alpha/\beta}^2 \leq 1$ gilt. Wodurch unterscheidet sich die Situation $\text{Tr } \rho_{\alpha/\beta}^2 = 1$ von der mit $\text{Tr } \rho_{\alpha/\beta}^2 < 1$?



Abbildung 1: Stern-Gerlach-Apparate (α) und (β)

Tipp: Normierungen beachten!

- (b) Wir betrachten einen Strahl von Spin-1/2-Teilchen, deren Zustand durch den Dichteoperator

$$\rho_0 = |+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -| \quad (1)$$

gegeben ist. Dieser falle auf den Stern-Gerlach-Apparat (γ). Wie lautet der Dichteoperator ρ_γ für den Strahl, nachdem er den Apparat durchlaufen hat? Liegt nach dem Apparat eine reine Gesamtheit vor?

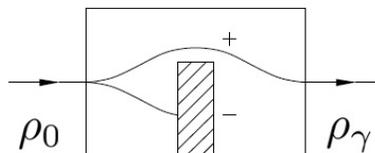


Abbildung 2: Stern-Gerlach-Apparat (γ)

- (c) Konstruiere eine Dichtematrix für einen vollständig in positiver x -Richtung polarisierten Spin-1/2-Strahl in der Basis $\{|s_z, +\rangle, |s_z, -\rangle\}$. Wie gross ist der Erwartungswert für die Polarisation in y -Richtung des Spins?

- (d) Konstruiere eine Dichtematrix für ein Gemisch für einen Spin-1/2-Strahl aus einem 3/4 in positiver z -Richtung polarisierten Anteil und einem 1/4 in positiver x -Richtung polarisierten Anteil in der Basis $\{|s_z, +\rangle, |s_z, -\rangle\}$. Berechne die Erwartungswerte für s_x , s_y und s_z .

2. Zweizustandssystem (Übungsstunde)

Gegeben sei der Hamiltonian

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

in der Basis $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ der Eigenwerte eines Operators A .

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $W(t)$ bei einer Messung von A zur Zeit t den Messwert a_1 zu erhalten, wenn zur Zeit $t = 0$ ein statistisches Gemisch

$$\rho_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

vorliegt?

3. Harmonischer Oszillator im Heisenbergbild (Schriftlich)

Die Operatoren im Heisenbergbild sind mit denen im Schrödingerbild durch die Relation

$$A_H(t) = U^{-1}(t)A_S U(t), \quad U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \quad (4)$$

verknüpft. $U(t)$ stellt dabei den Zeitentwicklungsoperator dar, der die *Schrödinger-gleichung* $i\hbar\partial_t U(t) = H U(t)$ erfüllt. Weiterhin definieren wir die (zeitunabhängigen) Zustände im Heisenbergbild als $|\psi_H\rangle := |\psi_S(t=0)\rangle$. Die Indices H stehen hierbei für *Heisenberg*, die Indices S für *Schrödinger*.

- (a) Leite über Gl. (4) die Heisenberg'sche Bewegungsgleichung für Operatoren,

$$\partial_t A_H(t) = \frac{i}{\hbar} [A_H(t), H] \quad (5)$$

her.

- (b) Wir betrachten nun den Hamiltonian für den harmonischen Oszillator

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} Q^2 = \hbar\omega \left(a_S^\dagger a_S + \frac{1}{2} \right), \quad [a_S, a_S^\dagger] = 1. \quad (6)$$

Zeige

$$a_H(t) = e^{i\omega t} a_S, \quad a_H^\dagger(t) = e^{-i\omega t} a_S^\dagger. \quad (7)$$

Tipp: BCH.

- (c) Bestimme damit die Relationen

$$Q_H(t) = Q_H(t; P_S, Q_S), \quad P_H(t) = P_H(t; P_S, Q_S). \quad (8)$$

Tipp: $0 = e^{-i\omega t} a_S - e^{-i\omega t} a_S$ bzw. $0 = e^{i\omega t} a_S^\dagger - e^{i\omega t} a_S^\dagger$.

- (d) Zeige, dass die Heisenberg'sche Bewegungsgleichung (5) auf die klassischen Hamiltongleichungen für die Operatoren $Q_H(t)$ und $P_H(t)$ für den harmonischen Oszillator führt.
- (e) Wir definieren zur Zeit $t = 0$ den Zustand $|\psi_S(t = 0)\rangle = |\psi_H\rangle = |1\rangle + |2\rangle =: |\gamma\rangle$ ($N|n\rangle = n|n\rangle$). Berechne die Erwartungswerte

$$\langle Q_H(t) \rangle_\gamma = \langle \gamma | Q_H(t) | \gamma \rangle, \quad \langle P_H(t) \rangle_\gamma = \langle \gamma | P_H(t) | \gamma \rangle, \quad (9)$$

für beliebige Zeiten t .