Theoretische Physik II: Quanten Mechanik, Übung 13

Prof. Hans Peter Büchler WS 2009, Abgabe 12. Januar 2010

1. **Nützliche Eigenschaften der Pauli-Matrizen(mündlich)**
   Die Pauli-Matrizen sind

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   Zeige das gilt:

   a) $\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2\mathrm{i}\epsilon_{ijk}\sigma_k$,

   b) $\sigma_i \sigma_j = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\sigma_k$, $i \neq j$,

   c) $\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}$, und daraus $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$ und $\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i$,

   d) $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\sigma_k$.

2. **Spinresonanz(Schriftlich)**

   a) Ein Spin in einem externen Magnetfeld wird durch den Hamiltonian $H = \gamma \mathbf{B}(t)\mathbf{S}$ beschrieben. Zeige, dass für die die Bewegung eines Spins folgende Heisenberggleichung gilt,

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{S}_H(t) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\boldsymbol{S}_H, \hat{\mathrm{H}}_H\right] = \gamma \boldsymbol{S}_H(t) \wedge \boldsymbol{B}(t) \tag{2}$$

   mit $\gamma < 0$.

   b) Löse diese Heisenberggleichung für ein Elektron im zeitabhängigen äusseren Magnetfeld

$$\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{B}_0 + B_1(\cos\omega t \boldsymbol{e}_x + \sin\omega t \boldsymbol{e}_y) \tag{3}$$

   wobei $\boldsymbol{B}_0 = (0, 0, B_0)$, $B_0 > 0$, $B_1 > 1$.

3. **Wasserstoffatom und relativistische Korrektur (Schriftlich)**

   a) Berechne die mittlere Geschwindigkeit eines Elektrons im Grundzustand eines Wasserstoffatoms: $\bar{v} = \frac{\sqrt{<p^2>}}{m}$. Berechne das Verhältnis $\bar{v}/c$ für das Wasserstoffatom.

b) Die relativistischen Korrekturen für ein Elektron im Wasserstoffatom lassen sich exakt aus der Dirac-Gleichung ableiten, wenn man diese um $\frac{v}{c}$ entwickelt. Wie groß ist $\frac{v}{c}$ für das Elektron im Grundzustand des Wasserstoffatoms?
In 2. Ordnung erhält man für den kinetischen Anteil der Energie:

$$T = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\right)^2 . \tag{4}$$

Diese beiden Terme, sind zusammen mit der Ruheenergie des Elektrons mc^2, die drei führenden Terme in der Entwicklung der relativistischen kinetischen Energie

$$E = \sqrt{(m^2c^4 + c^2p^2)}. \tag{5}$$

Betrachte den Term $\sim \boldsymbol{p}^4$ als Störung und berechne explizit die Korrekturen für den Grundzustand. (Tip: $-\frac{\boldsymbol{p}^4}{8m^3c^2} = -\frac{1}{2mc^2}\left(\hat{\mathrm{H}}_0 + \frac{Ze^2}{r}\right)^2$)

c) Berechne die allgemeinen Korrekturen aller Zustände, welche durch den Störterm notwendig. (Tip: $< r^{-1} >_{n\ell} = \frac{Z}{n^2 a_B}$ und $< r^{-2} >_{n\ell} = \frac{Z^2}{m^2 a_B^4 e^4 n^3}\left(\frac{1}{\ell+\frac{1}{2}}\right)$

d)* Finde einen Weg um $< r^{-1} >_{n\ell}$ und $< r^{-2} >_{n\ell}$ zu berechnen.