Theoretische Physik II: Quanten Mechanik, Probeaufgaben

Prof. Hans Peter Büchler WS 2009

1. Rabi Oscillationen

Betrachte ein Spin$-1/2$ Teilchen mit dem Hamiltonian

$$H = \frac{\hbar\Omega}{2}\Big[|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\Big] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \hbar\Omega \\ \hbar\Omega & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Zur Zeit $t = 0$ sei das System im Zustand $|\uparrow\rangle$ präpariert.

(a) Berechne die Zeitevolution des System mit dem Hamiltonian H.

(b) Berechne die Erwartungswerte $\langle\sigma_z\rangle$ und $\langle\sigma_x\rangle$, und zeichne sie als Funktion der Zeit t.

(c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Spin zur Zeit $t_1 = 3/(2\Omega)$ im Zustand $|\uparrow\rangle$ oder im Zustand $|\downarrow\rangle$.

(d) Eine Messung zur Zeit t_1 hat ergeben, dass der Spin im Zustand $|\uparrow\rangle$ ist. In Welchen Zustand ist der Spin zur Zeit $t_2 = 7/(2\Omega)$?

2. 1 D System

Betrachte ein eindimensionales Teilchen im Doppeltopf Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < -a \\ V_0\delta(x) & -a < x < a \\ \infty & x > a \end{cases} \tag{2}$$

(a) Schreibe den Hamilton Operator des Systems hin. Welche Kommutationsrelationen erfüllen x und p?

(b) Formuliere die Randbedingungen für die Wellenfunktion an den Punkten $x = -a$, $x = a$, und $x = 0$.

(c) Zeige, dass die Asymmetrischen Wellenfunktionen $\psi(x) = \sin\left(\frac{\pi x n}{a}\right)$ mit n eine natürliche Zahl Eigenzustände des Hamiltonians sind. Welches ist die dazugehörige Eigenenergie?

(d) Finde nun auch die Symmetrischen Lösungen und bestimme die Grundzustands Energie.

3. Harmonischer Oscillator

Betrachte den ein-dimensionalen Harmonischen Oscillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2. \tag{3}$$

(a) Drücke den Aufsteige Operator $a^\dagger$ und den Absteige Operator a mittels dem Orts Operator x und dem Impuls Operator p aus. Wie sieht der Hamiltonian in den neuen Operatoren aus?

(b) Berechne folgende Kommuntations Relationen

$$[a, a^\dagger] \qquad [x, a^\dagger] \qquad [(a)^n, a^\dagger] \qquad [H, x] \qquad [H, p] \tag{4}$$

mit n eine natürliche Zahl

(c) Gehe jetzt ins Heisenberg Bild über. Wie sehen die Operatoren

$$a_\mathrm{H}(t) \qquad a^\dagger_\mathrm{H}(t) \qquad x_\mathrm{H}(t) \qquad p_\mathrm{H}(t) \tag{5}$$

im Heisenberg Bild aus.

(d) Wie sieht die Grundzustands Wellenfunktion $\psi_0(x)$ aus. Berechne jetzt die Wellenfunktion $\psi_1(x)$ zur ersten Angeregten Energie aus durch Anwenden des Aufsteige Operators.

4. Störungstheorie

Ein Wasserstoffatom wird entlang der z-achse durch einen Harmonisches Potential

$$V_\mathrm{ext}(\mathbf{x}) = kz^2 \tag{6}$$

gestört.

(a) Berechne die Energie Korrektur des Grundzustandes in 1. Ordnung Störungstheorie.

(b) Betrachte jetzt den Angeregten Zustand mit der Hauptquantenzahl $n = 2$. Wie gross ist die Energieentartung? Welche Quantenzahlen charakterisieren die Zustände?

(c) Die Störung führt jetzt zu einer Aufspaltung dieser Energieentartung. Aus Symmetrie lässt sich sagen, wie diese Aufspaltung der Entartung aussieht. Welches sind die guten Quantenzahlen? (Begründung) Welches wird der Zustand mit der tiefsten Energie und welcher mit der höchsten Energie?

(d) Überprüfe die Begründung aus (c) durch explizites ausrechnen.

5. Hilbertraum

Betrachte ein Teilchen mit Bahndrehimpuls $l = 2$ (d-Welle) und einem internen Spin $S = 3/2$.

(a) Wie gross ist die Dimension des Hilbertraumes und stelle eine natürliche Basis auf die die Zustände berschreibt.

(b) Welches sind die erlaubten Werte des totalen Drehimpulses J nach dem Drehimpuls Additionstheorem?

(c) Welches ist die Parität der Zustände?

(d) Der Hamiltonian ist nur durch die Spin-Bahn Kopplung $H = \gamma \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ gegeben. Berechne die Eigenenergien des Systems und gebe die Entartung an.