Theoretische Physik II: Quanten Mechanik, Übung 2

Prof. Hans Peter Büchler WS 2009, 27. Oktober 2009

1. Ebene Wellen (Schriftlich)

Ebene Wellen im Intervall $[0, L]$ mit periodischen Randbedingungen sind gegeben durch

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_n\, x\right) \qquad \text{mit} \qquad p_n = \frac{2\pi\hbar n}{L}. \tag{1}$$

Zeige dass dies ein vollständiges Set von orthonormierten Basisfunktionen darstellt, d.h., zeige die Relationen

$$\int_0^L dx\, [\psi_n(x)]^*\, \psi_m(x) \;=\; \delta_{n,m} \qquad : \text{Orthogonalität} \tag{2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [\psi_n(x)]^*\, \psi_n(x') \;=\; \delta(x - x') \qquad : \text{Vollständigkeit.} \tag{3}$$

Im Limes $L \to \infty$ nehmen die Orthogonalität und die Vollständigkeit folgende Form an

$$\int dx \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(p - p')x\right] \;=\; 2\pi\hbar\delta(p - p') \qquad : \text{Orthogonalität} \tag{4}$$

$$\int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(x - x')p\right] \;=\; \delta(x - x') \qquad : \text{Vollständigkeit.} \tag{5}$$

Führe den Limes $L \to \infty$ explizit durch für ψ_n mit einer geeigneten Vorfaktor und zeige die Vollständigkeit und Orthogonalität. (Die Basisfunktionen sind nicht mehr normierbar und werden daher als verallgemeinertes Set von Basisfunktionen bezeichnet.)

2. Klassische Wirkung (Schriftlich)

In der klassischen Mechanik ist die Wirkung definiert durch

$$S\,[q, t] = \int_{t_0}^{t} dt' L(q, \dot{q}, t). \tag{6}$$

(a) Berechne die Wirkung $S(q_t, t)$ entlang klassischen Bahnen fr folgende Systeme

  (i) Freies Teilchen,

  (ii) Harmonischer Oszillator mit $V(q) = \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$,

  (iii) konstante Kraft F,

  wobei der Anfangspunkt $q(t_0) = 0$ und Endpunkt q_t zur Zeit t.

(b) Für klassische Bahnen mit festen Anfangspunkt $q(t_0) = q_0$ kann man S auffassen als Funktion von $S(q_t, t)$. Zeige nun dass gilt

$$\frac{\partial S}{\partial_{q_t}} = p_t \qquad \frac{\partial S}{\partial_t} = -H. \tag{7}$$

3. Freier Propagator (Übungsstunde)

Der Propagator $K(x, x', t)$ zum Hamilton Operator H ist definiert durch eine Lösung der Schrödinger Gleichung

$$[i\hbar\partial_t - H(p, x)]\, K(x, x', t) = 0 \tag{8}$$

mit der Anfangsbedingung $K(x, x', 0) = \delta(x - x')$. Zeige, dass für eine beliebige Anfangsbedingung $\psi_0(x)$ bei $t = 0$ die Lösung der Schrödinger Gleichung gegeben ist durch

$$\psi(x, t) = \int dx' K(x, x', t)\psi_0(x'). \tag{9}$$

Beweise mittels Fourier Transformation (Entwicklung in ebene Wellen), dass der Propagator des freien Teilchens mit $H = p^2/2m$ gegeben ist durch

$$K(x, x', t) = \left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{(1/2)} \exp\left[\frac{im(x - x')^2}{2\hbar t}\right]. \tag{10}$$