Theoretische Physik II: Quanten Mechanik, Übung 3

Prof. Hans Peter Büchler WS 2009, 3. November 2009

1. **Wellenpakete (Schriftlich)**

   Wir betrachten zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Wellenpaket der Form

$$\psi(x,0) = A\, e^{ik_0 x} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma}} \ . \tag{1}$$

   (a) Berechne die Normierungskonstante A.

   (b) Zeige, dass das Wellenpaket die Form

$$\psi(x,t) = \left(\frac{\sigma}{2\pi\sigma_t^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{ik_0 x} e^{-i\frac{\hbar}{2m}k_0^2 t} e^{-\frac{(x-(x_0+\hbar k_0 t/m))^2}{4\sigma_t}}, \quad \sigma_t = \sigma + i\frac{\hbar}{2m}t \ . \tag{2}$$

   für beliebige Zeiten t annimmt.

   (c) Bestimme die Geschwindigkeit des durch das Wellenpaket beschriebenen Teilchens über

$$\langle v \rangle = \partial_t \langle x \rangle, \quad \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x,t) x \psi(x,t) \ . \tag{3}$$

   (d) Die Ortsunschärfe Δx ist durch $(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ gegeben. Sie ist ein Mass für die Breite des Wahrscheinlichkeitsverteilung. Bei $t = 0$ ist $(\Delta x)^2|_{t=0} = \sigma$. Zeige, dass die Ortsunschärfe für beliebige Zeiten t die Form

$$(\Delta x)^2 = \sigma(a_0 + a_1 t^2) \tag{4}$$

   beistzt.

   (e) Ein Temperaturprofil $T(x,t)$ wird durch die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t T(x,t) - D\partial_x^2 T(x,t) = 0 \tag{5}$$

   beschrieben, wobei D eine reelle Konstante darstellt. Zeige, dass die Breite eines Gauss'schen Profils nun die Form

$$(\Delta x)^2 = \sigma(b_0 + b_1 t) \tag{6}$$

   besitzt, dass also die Ursache der quadratische Verbreiterung das i in der Schödingergleichung ist. Beachte, dass $\langle x \rangle$ hierbei durch

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, T(x,t) x \tag{7}$$

definiert ist.

Die Lösung für die Wärmeleitungsgleichung erhält man durch Wick-Rotation $t \to -it$ aus der Lösung der Schrödingergleichung. Weiterhin müssen wir $k_0 = 0$ setzen, da wir bei Temperaturverteilungen nur Diffusion betrachten können.

(f) Wir betrachten nun die Dispersionsrelation $\omega(k)$. Diese ist bei massiven Teilchen

$$\omega(k) = \frac{\hbar}{2m}k^2 \ . \tag{8}$$

Zeige, dass für eine lineare Dispersionsrelation $\omega(k) = c_0 + c_1 k$ das Wellenpaket seine Form behält, also nicht mit der Zeit zerfliesst.

2. Doppelspalt und Unschärferelation (Übungsstunde)

Wir betrachten einen Doppelspaltversuch.Elektronen mit dem Impuls p_0 bewegen sich senkrecht auf den Schirm mit den Spalten (Spaltabstand a) zu, und ergeben ein Interferenzmuster auf einem zweiten Schirm im Abstand d. Die Bahn der Elektronen vom Spalt zum Auftreffpunkt auf dem Schirm schliesst mit der Normalen des Schirms den Winkel ϕ_1, $i = 1, 2$ ein.

(a) Berechne die Lage der Maxima des Interferenzmusters. Verwende hierzu

$$P(b,c) = |K(b,a)|^2 = |\Phi(x_1) + \Phi(x_2)|^2 \tag{9}$$

wobei $K(b,a)$ den Propagator darstellt, und die Phasen Φ durch

$$\Phi \propto e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}, \quad S = \int dt\, L = \int dt\, \frac{m}{2}(\partial_t x)^2 \tag{10}$$

gegeben sind. Weiterhin werden die Winkel ϕ als klein und nahezu gleich angenommen.

(b) Wir gehen von einer klassischen Teilchenvorstellung aus, nach der die Elektronen einen Impulsübertrag von den Spalten bekommen. Bei elastischen Streuung lässt sich der Impulsübertrag über

$$p_i = -p_0 \sin \phi_i \tag{11}$$

mit dem Winkel ϕ_i in Verbindung bringen. Da wir messen wollen, aus welchem Spalt das Elektron kommt, müssen wir die Nherung gleicher Winkel hier fallen lassen. Diesen Impulsübertrag messen wir nun, indem wir an die Ränder der Spalte entsprechende Messgeräte anbringen. Dabei müssen wir beachten, dass das Messgerät ebenfalls der Quantenmechanik unterliegt, also eine Orts- und Impulsunschärfe besitzt. Um die Winkel genau auflösen zu können muss die Bedingung $\Delta p \ll |p_2 - p_1|$ gelten. Da auch für die Messgeräte die Quantenmechanik gilt, erhalten wir die Relation $\Delta p \Delta x \geq h$.

Bestimme Δx in Abhängigkeit von a, d und dem Impuls p_0 der Elektronen.

(c) Vergleiche das Ergebnis mit dem Streifenabstand des Interferenzmusters aus (a)

3. Harmonischer Oszillator im Pfadintegralformalismus*

(a) Berechne die Funktionalableitungen

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} \qquad \text{und} \qquad \frac{\delta^2 S}{\delta x(t)\delta x(t')} \,. \tag{12}$$

Tipp: Die Funktionalableitung vertauscht mit der Zeitableitung, und es gilt $\frac{\delta}{\delta x(t')} x(t) = \delta(t-t')$.

(b) Wir betrachten eine Sattelpunktentwicklung $x = x_{\mathrm{cl}} + y$ um den klassischen Pfad x_{cl} und den Fluktiationen y. Es gilt

$$S[x] = S[x_{\mathrm{cl}}] + \int_{t_a}^{t_b} dt\, \frac{\delta S}{\delta x(t)} y(t) + \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt\, dt'\, \frac{\delta^2 S}{\delta x(t)\delta x(t')} y(t) y(t') \tag{13}$$

Berechne den letzten Term

$$S[y] := \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt\, dt'\, \frac{\delta^2 S}{\delta x(t)\delta x(t')} y(t) y(t') \tag{14}$$

der Entwickung.

(c) Die Greens-Funktion G lässt sich durch Pfadintegrale in der Form

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \mathcal{D}x\, e^{\frac{i}{\hbar} S[x]} \approx e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{\mathrm{cl}}]} \int \mathcal{D}y\, e^{\frac{i}{\hbar} S[y]} \tag{15}$$

$$F(T) = \int \mathcal{D}y\, e^{\frac{i}{\hbar} S[y]} \tag{16}$$

ausdrücken. Das $\approx$ steht hierbei für die quasiklassische Entwicklung. Da wir beim harmonischen Oszillator eine quadratische Wirkung haben, ist diese Entwicklung exakt. Die Pfadintegrale sind invariant unter Zeittranslation, weshalb wir das betrachtete Zeitintervall auf $[0, T]$ mit $T := t_b - t_a$ setzen.
Die klassische Lösung x_{cl} ist gegeben durch

$$x_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{\sin \omega T} \left[(x_b \cos \omega t_a - x_a \cos \omega t_b) \sin \omega t + (x_a \sin \omega t_b - x_b \sin \omega t_a) \cos \omega t \right] \tag{17}$$

Berechne damit $S[x_{\mathrm{cl}}]$.

(d) Berechne $S[y]$ über die Entwicklung

$$y(t) = \sum_n a_n y_n(t), \quad y_n = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{n\pi\, t}{T} \tag{18}$$

Tipp: Verwende die Eigenwerte $(-\partial_t^2 - \omega^2)\, y_n(t) = \lambda_n y_n(t)$.

(e) Das Pfadintegral nimmt in der obigen Entwicklung die Form

$$\mathcal{D}y = J \prod_{n=1}^{\infty} da_n \tag{19}$$

an, wobei J einen Normierungsfaktor darstellt. Berechne $F(T)$ in Abhängigkeit von J und λ_n.

(f) Um die Normierung J zu bestimmen, betrachten wir ein freies Teilchen (Siehe Skript Formel 1.18). Dieses erhalten wir, indem wir die Oszillatorfrequenz ω gegen Null schicken. Berechne nun

$$\frac{F(T)}{F_0(T)} \tag{20}$$

mit $F_0(T) = F(T)|_{\omega=0}$.

Tipp: Das Produkt ergibt eine einfache Funktion.

Mit diesem Ergebnis folgt

$$F(T) = \frac{F(T)}{F_0(T)} F_0(T) \tag{21}$$

mit $F_0(T) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right)^{1/2}$.

(g) Wir erhalten damit für die Greens-Funktion des harmonischen Oszillators

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin\omega T}\right) e^{\frac{i}{2\hbar}\frac{m\omega}{\sin\omega T}\left[(x_a^2+a_b^2)\cos\omega T - 2x_a x_b\right]} \tag{22}$$

Um daraus die Energieeigenwerte zu bestimmen, berechne

$$\operatorname{Tr} e^{-\frac{i}{\hbar}HT} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, G(x,T;x,0) \tag{23}$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n T}. \tag{24}$$

Aus dem Vergleich erhältst du die Energien E_n.

Tipp: Verwende die Geometrische Reihe.