Theoretische Physik II: Quanten Mechanik, Uebung 4

Prof. Hans Peter Büchler WS 2009, 10. November 2009

1. Kommutatoren (Schriftlich)

(a) Zeige die Identität $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

(b) Berechne $[x, p^2]$, $[x^2, p^2]$ und $[xp, p^2]$.

(c) Seien $g(x)$, $f(p)$ in eine Taylor-Reihe entwickelbar. Zeige, dass gilt $[p, g(x)] = -i\hbar \frac{d}{dx} g(x)$ und $[x, f(p)] = i\hbar \frac{d}{dp} f(p)$.

2. Baker-Campell-Hausdorff-Formel (Schriftlich)

Es seien zwei nichtkommutierende Operatoren A und B gegeben, für die sonst die Relationen $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ gelten.

(a) Zeigen Sie, dass für die Operatoren A und B die Gleichung

$$e^{-At} B e^{At} = B - t[A, B]$$

erfüllt ist, wobei t eine beliebige Zahl ist.

(b) Zeigen Sie, dass die beiden Operatoren die Baker-Campell-Hausdorff-Formel

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}$$

erfüllen. (Tip: Leite für den Operator $W(t) = e^{-tA} e^{t(A+B)}$ eine differential Gleichung 1.Ordnung her und löse diese.)

3. Heisenberg'sche Unschaerfe Relation (Uebungsstunde)

(a) Zeigen Sie, dass für Impuls- und Ortsoperator, p und x, die Unschärferelation

$$\overline{\Delta p} \cdot \overline{\Delta x} \geq \frac{\hbar}{2}$$

gilt, wobei für einen Operator A die Varianz als $\overline{\Delta A} = \sqrt{\langle (\Delta A)^2 \rangle}$ und die Abweichung vom Erwartungswert als $\Delta A = A - \langle A \rangle$ definiert ist.

(b) Gegeben seien zwei hermitsche Operatoren A und B. Beweisen Sie, dass die verallgemeinerte Unschärferelation

$$\Delta^2(A) \cdot \Delta^2(B) \geq \frac{\langle i[A, B] \rangle^2}{4}$$

erfüllt ist, wobei $\langle A \rangle$ der Erwartungswert und $\Delta^2(A) = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$ die Unschärfe von A in einem gegebenen Zustand ist. Zeigen Sie dann, dass dieses Ergebnis mit Teil (a) konsistent ist.