Theoretische Physik II: Quanten Mechanik, Übung 5

Prof. Hans Peter Büchler WS 2009, 17. November 2009

1. 1-dimensionaler endlicher Potential Topf (Schriftlich)
Bestimme die gebunden Zustände in einem 1-dimensionalen endlichen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } |x| < x_0, \\ 0 & \text{sonst.}, \end{cases} \tag{1}$$

sowie die transzendente Bestimmungsgleichung der Energien dieser Zustände. Analysiere sie und werte sie grafisch aus.

2. Kohärente Zustände (Schriftlich)
Für beliebige $\alpha \in \mathbb{C}$ definieren wir den kohärenten Zustand

$$|\psi_\alpha\rangle := \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\psi_n\rangle \,. \tag{2}$$

a) Zeige, dass

$$|\psi_\alpha\rangle = \mathrm{e}^{\alpha \hat{a}^\dagger - \bar{\alpha}\hat{a}} |\psi_0\rangle \,, \tag{3}$$

wobei $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ die in der Vorlesung definierten absteige und aufsteige Operatoren sind.(Tip: $\mathrm{e}^{-\bar{\alpha}\hat{a}} |\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle$)

b) Berechne $\langle x \rangle_\alpha \equiv \langle \psi_\alpha | \hat{x} | \psi_\alpha \rangle$, $\langle p \rangle_\alpha$, Δx_α, Δp_α und zeige, dass für alle $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\Delta x_\alpha \Delta p_\alpha = \frac{\hbar}{2}, \tag{4}$$

gilt, d.h. dass kohärente Zustände die Unschärfe minimieren.
(Tip: $\hat{a}\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha$)

c) Zeige, dass kohärente Zustände nicht orthogonal sind und stattdessen

$$\langle \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\bar{\alpha}\beta\right)}, \tag{5}$$

gilt.

d) Berechne die Wellenfunktionen

$$\psi_\alpha(x) = \langle x | \psi_\alpha \rangle \,, \tag{6}$$
$$\varphi_\alpha(p) = \langle p | \psi_\alpha \rangle \,, \tag{7}$$

die zum kohärente Zustand ψ_α, in der Orts-, bzw., in der Impuks-Darstellung, gehören. Zeige, dass

$$|\psi_\alpha(x)|^2 = \left|\tilde{\psi}_0(x - \langle x\rangle_\alpha)\right|^2, \tag{8}$$

$$|\varphi_\alpha(p)|^2 = |\tilde{\varphi}_0(p - \langle p\rangle_\alpha)|^2, \tag{9}$$

wobei $\tilde{\psi}_0$ und $\tilde{\varphi}_0$ die Wellenfunktionen des Grundzustandes, im Orts-, bzw., im Impulsraum sind

$$\tilde{\psi}_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}, \tag{10}$$

$$\tilde{\varphi}_0 = \left(\frac{1}{\pi\hbar m\omega}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{m\omega\hbar}p^2}. \tag{11}$$

(Tip: $\xi = \sqrt{\frac{\omega m}{\hbar}}x$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} = \sqrt{\frac{\pi}{m\omega}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$)

3. Kontinuität und Unitarität (Übungsstunde)

a) Zeige ausgehend von der Schrödingergleichung und der Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\left[\psi^*(\boldsymbol{r}, t)\nabla_{\boldsymbol{r}}\psi(\boldsymbol{r}, t) - \psi(\boldsymbol{r}, t)\nabla_{\boldsymbol{r}}\psi^*(\boldsymbol{r}, t)\right], \tag{12}$$

dass die Wahrscheinlichkeit erhalten bleibt.

b) Die Zeitentwicklung eines reinen Zustands wird beschrieben durch

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)\,|\psi(t_0)\rangle \tag{13}$$

mit $U(t, t_0)$ dem Zeitentwicklungsoperator. Begründe mit , u.a. mit Teilaufgabe a), welche vier Eigenschaften dieser Operator erfüllen muss. Zeige, dass diese für

$$U(t, t_0) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t - t_0)} \tag{14}$$

erfüllt sind.