Theoretische Physik II: Quanten Mechanik, Übung 6

Prof. Hans Peter Büchler WS 2009, 24. November 2009

1. Erzeuger- und Vernichter-Operatoren (Schriftlich)

(a) Führe für den zweidimensionalen Harmonischen Oszillator mit Eigenfrequenzen ω_+, ω_- zwei unabhängige Erzeuger- und Vernichter-Operatoren ein mit den Vertauschungsrelationen

$$[a_\pm, a_\pm^\dagger] = 1, \qquad [a_\pm, a_\pm] = [a_\pm^\dagger, a_\pm^\dagger] = 0. \tag{1}$$

Zeige, dass der Hamiltonian für das System diagonal ist in der Eigenbasis des Zähloperatoren $N_+ = a_+^\dagger a_+$ und $N_- = a_-^\dagger a_-$. Bestimme die Eigenenergien. Legt eine Messung der Observable $N = \langle N_+ + N_- \rangle$ den Zustand des Systems eindeutig fest?

(b) Definiere den Grundzustandsvektor $|0,0\rangle$ durch $a_\pm|0,0\rangle = 0$, normiert auf $\langle 0,0|0,0\rangle = 1$. Der Hilbertraum wird durch Anwendung der Erzeuger-Operatoren auf $|0,0\rangle$ erzeugt. Zeige die Kommutatorrelationen

$$[N_+, a_+] = -a_+, \qquad [N_+, a_+^\dagger] = a_+^\dagger \tag{2}$$

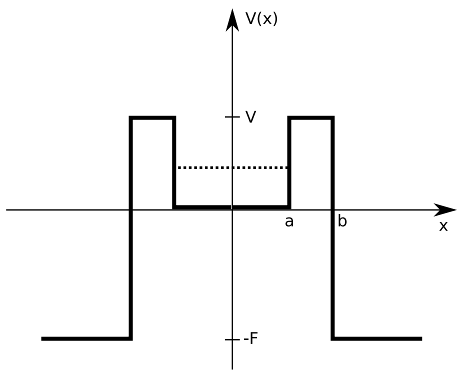
(analog N_-). Bestimme die normierten Eigenvektoren $|n_+, n_-\rangle$ der beiden Zähloperatoren mit Eigenwerten n_+ bzw. n_-.

(c) Verifiziere die folgenden Relationen:

$$a_+^\dagger|n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_+ + 1}|n_+ + 1, n_-\rangle \tag{3}$$
$$a_+|n_+, n_-\rangle = \sqrt{n_+}|n_+ - 1, n_-\rangle. \tag{4}$$

2. Zerfall metastabiler Zustände (Übungsstunde)

Wir betrachten ein Teilchen im Potential $V(x)$. Wir erwarten, dass das System für $F \gg V$ und $V \gg E > 0$ Zustände besitzt, die gebundenen Zuständen entsprechen, die aber nicht stabil sind und durch quantenmechanisches Tunneln zerfallen können. Im Folgenden beschränken wir uns auf symmetrische Wellenfunktionen und machen den Ansatz



$$\begin{aligned} |x| < a: &\qquad \psi(x) = cos(qx) \\ a < |x| < a+b: &\qquad \psi(x) = A\exp[-\kappa(|x|-a)] + B\exp[\kappa(x-a)] \\ |x| > a+b: &\qquad \psi(x) = C\exp[ik(|x|-a-b)] \end{aligned} \tag{5}$$

mit $q = \sqrt{2mE}/\hbar$, $\kappa = \sqrt{2m(V-E)}/\hbar$ und $k = \sqrt{2m(E+F)}/\hbar$. Beachte, dass dieser Ansatz für $|x| > a+b$ nur eine auslaufende Welle enthält. Ein solcher Ansatz führt Randbedingungen ein, welche die Hermitizität des Hamiltonians verletzen, d.h. ein endlicher Wahrscheinlichkeitsstrom verlässt das System und die Norm der Wellenfunktion ist nicht mehr erhalten. Als Konsequenz erhalten die Eigenenergien einen komplexen Anteil; die Wellenfunktionen werden als metastabile Zustände bezeichnet.

(a) Formuliere Stetigkeitsbedingungen an den Potentialstufen und zeige, dass dies folgende implizite Gleichung für die Eigenenergien E_n bestimmt; entwickle dazu im kleinen Parameter κ/k

$$q\sin(qa) = \kappa(A-B) = \kappa\cos(qa)\left[\coth(\kappa b) + \frac{\kappa}{ik\sinh(\kappa b)^2}\right] + O(k/\kappa). \tag{6}$$

Wir betrachten eine große Barriere, d.h. das Tunneln ist um den exponentiellen Faktor $\exp(-2\kappa b)$. Entwickle daher Gl. (6) in $\exp(-2\kappa b)$.

(b) In nullter Ordnung entsprechen die Eigenenergien denen des Potentialtopfs. Zeige, dass die tiefste Eigenenergie E_0 für $q/\kappa \ll 1$ folgende Form hat

$$E_0 = \frac{(\hbar q_0)^2}{2m} \quad \text{mit} \quad q_0 = \frac{\pi/2}{a+1/\kappa}. \tag{7}$$

(c) In erster Ordnung in $\exp(-2\kappa b)$ lässt sich die Energie E_{MS} dann schreiben

$$E_{MS} = E_0 + \Delta - i\Gamma/2. \tag{8}$$

Berechne Δ und Γ. Zeige, dass sich der Imaginärteil in der Energie als Zerfallsrate interpretieren lässt

$$|\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle|^2 \sim \exp(-\Gamma t). \tag{9}$$

(d) Zeige. dass für den Wahrscheinlichkeitsstrom folgende Relationen gelten

$$j(x=a+b, t=0) = \frac{\hbar k}{m}|\psi(a+b,0)|^2/N = \Gamma/2. \tag{10}$$

Welches ist die sinnvolle Normierung N der Wellenfunktion?

(e)* Nun betrachten wir die wirklichen Eigenenergien des Potentials $V(x)$, welche die Hermitizität des Hamiltonians erhalten. Solche Lösungen sind für $|x| > a+b$ durch eine ein- und auslaufende Welle charakterisiert. Die Lösungen in einem symmetrischen Potential besitezen das asymptotische Verhalten ($|x| \to \infty$)

$$\psi_0 \sim \cos(|x|k + \delta_0) \tag{11}$$

$$\psi_1 \sim \operatorname{sgn}(x) i \sin(|x|k + \delta_1) \tag{12}$$

mit und $\operatorname{sgn}(\pm 1) = \pm 1$. Die Phasen δ_0 und δ_1 werden die Streuphase zur symmetrischen und antisymmetrischen Wellenfunktion genannt.

Schreibe für das Potential $V(x)$ den Ansatz für die symmetrische Wellenfunktion auf und formuliere die Stetigkeitsbedingungen, welche die Streuphase $\delta_0(E)$ zur Energie E definieren. Vergleiche das Resultat mit Teilaufgabe (a).

(f)* Wir definieren den Streuquerschnitt $\sigma = |f(1)|^2 + |f(-1)|^2 = \sigma_0 + \sigma_1$, wobei die partiellen Streuquerschnitte die Streuung mit der entsprechenden Symmetrie der Wellenfunktion beschreiben. Das optische Theorem drückt die partiellen Streuquerschnitte durch die entsprechenden Streuphasen aus:

$$\sigma_i = \frac{1}{(\cot \delta_i)^2 + 1}. \tag{13}$$

Beweise, dass bei den komplexen Energien E_{MS} und E_{MS}^* der partielle Streuquerschnitt Polstellen besitzt.

(g)* Zeige, dass $\sigma_0(E)$ in der Nähe der Pole folgende Form annimmt

$$\sigma_0(E) \sim \frac{1}{(E - E_0 - \Delta)^2 + \Gamma^2/4}, \tag{14}$$

d.h. metastabile Zustände ergeben Resonanzen in den partiellen Streuquerschnitten.