Theoretische Physik II: Quanten Mechanik, Übung 8

Prof. Hans Peter Büchler WS 2009, 8. Dezember 2009

1. **Rotation von zweiatomigen Molekülen (Schriftlich)**

   In guter Näherung lässt sich die Rotation eines zweiatomigen Moleküls beschreiben, indem man im Ruhesystem des Schwerpunkts den Abstand der Atome als fest betrachtet (starrer Rotator). Aufgrund der Symmetrie des Moleküls sind zwei Trägheitsmomente identisch ($I_x = I_y \equiv I_\perp$), das dritte ist jedoch verschieden $I_z = I_\parallel$).

   (a) Gib den Hamiltonian für das System an, in Abhängigkeit von den Drehimpulsoperatoren $\mathbf{L}^2$ und L_z.

   (b) Bestimme die Energieeigenwerte und Eigenzustände.

2. **Unsymmetrischer Kreisel (Schriftlich)**

   (a) Betrachte einen Kreisel mit dem Hamiltonian

   $$H = \frac{L_x^2}{2I_x} + \frac{L_y^2}{2I_y} + \frac{L_z^2}{2I_z}. \tag{1}$$

   Zeige, dass $\mathbf{L}^2$ mit dem Hamiltonian vertauscht. Führe Auf- und Absteigeoperatoren $L_\pm = L_x \pm iL_y$ ein und drücke den Hamiltonian in Abhängigkeit von diesen (und L_z) aus.

   (b) Nun soll der gesamte Hilbertraum des Problems $\mathcal{H}$ in Unterräume $\mathcal{H}'_l$ und $\mathcal{H}''_l$ aufgeteilt wird, sodass die Summe der Unterräume wieder den gesamten Hilbertraum ergibt. Für die Eigenzustände $|l, m\rangle$ von $\mathbf{L}^2$ und L_z enthält $\mathcal{H}'_l$ die Zustände mit $m = l, l-2, \ldots, -l+2, -l$, für Zustände in $\mathcal{H}''_l$ gilt $m = l-1, l-3, \ldots, -l+3, -l+1$. Zeige, dass das Anwenden des Hamiltonians auf einen Zustand in einem Unterraum diesen invariant lässt, d.h. das Ergebnis liegt wieder im selben Unterraum.

   (c) Betrachte den Operator $U = \exp(-i\pi L_y/\hbar)$. Zeige unter Benutzung von $[U, H] = 0$ und $U|l, m\rangle = (-1)^{l-m}|l, -m\rangle$, dass sich der gesamte Hilbertraum $\mathcal{H}$ wie folgt zerlegen lässt:

   $$\mathcal{H} = \bigoplus_l \mathcal{H}_l \ \text{ mit } \ \mathcal{H}_l = \mathcal{H}'_{l+} \oplus \mathcal{H}'_{l-} \oplus \mathcal{H}''_{l+} \oplus \mathcal{H}''_{l-}, \tag{2}$$

   wobei all diese Unterräume invariant sind unter H. (Hinweise: Zeige zunächst, dass $[\mathbf{L}^2, U] = 0$. Der Operator U koppelt den Zustand $|l, m\rangle$ an den Zustand $|l, -m\rangle$. Die Zerlegung in obige Unterräume folgt dann durch Diagonalisierung der jeweiligen 2×2-Matrizen.)

(d) Berechne die Eigenwerte und Eigenfunktionen von H für den Fall $l = 1$. Anschliessend lse das Problem auch fr $l = 3$, und vergleiche das Ergebnis mit Aufgabe 1.

3. Kugeloszillator (Übungsstunde)

(a) Zeige, dass der isotrope dreidimensionale harmonischen Oszillators durch drei unabhängige eindimensionale Oszillatoren ausgedrückt werden kann. Gib die Eigenwerte und den jeweiligen Entartungsgrad an.

(b) Analog zum Wasserstoffproblem kann der Winkelteil absepariert werden. Gib dazu die Kommutatoren $[\mathbf{L}^2, H]$ und $[L_z, H]$ an und schreibe den Hamiltonian in Kugelkoordinaten wieder in Abhängigkeit der Eigenoperatoren zum Drehimpuls.

(c) Wähle als Ansatz für die Wellenfunktion

$$\psi(r) = \frac{x_l(r)}{r} Y_{lm}(\phi, \theta) \tag{3}$$

und leite eine Differentialgleichung für den Radialteil her.

(d) Zeige, dass aus dem asymptotischen Verhalten der Differentialgleichung für $r \to \infty$ und $r \to 0$ der Reihenansatz

$$x_l(r) = \exp(-r^2/2) r^{l+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \tag{4}$$

folgt. Gib eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_n an und bestimme wiederum die Eigenwerte und die jeweilige Entartung.