Aufgabe 29 mit Musterlösung

Teilchen auf einem Ring

Wir betrachten ein eindimensionales System aus N ununterscheidbaren Teilchen auf einem Ring. Wir nehmen weiterhin an, dass die Teilchen sich nicht durchdringen können, aber sich sonst frei auf dem Ring bewegen können.
Wie viele unterschiedliche Zustände gibt es auf dem Ring? Wie sehen diese aus? Welche Paritäten haben sie?

Lösung zu Aufgabe 29:
Ein Zustand auf dem Ring hat die allgemeine Form $|\phi_{n_1}, \phi_{n_2}, \phi_{n_3} \dots \phi_{n_N}\rangle$. Aufgrund der Ununterscheidbarkeit ist jedoch auch jede Permutation der $\phi_{n_i}' s$ zulässig,

$$|\phi\rangle = s|\phi_{n_1}, \phi_{n_2}, \phi_{n_3} \dots \phi_{n_N}\rangle, \text{ mit } s \in S_N \tag{1}$$

Da die Ordnung der Symmetrischen Gruppe $|S_N| = N!$ ist, führt dies zu $N!$ Zuständen.
Durch die zyklischen Randbedingungen auf dem Ring ist aber z.B. der Zustand $|\phi_1, \phi_2, \phi_3\rangle$ gleich dem Zustand $|\phi_3, \phi_1, \phi_2\rangle$. Im allgemeinen Fall von N Teilchen erhalten wir damit $N!/N = (N-1)!$ mögliche Zustände.
Die Parität dieser Zustände ist im allgemeinen nicht mehr erhalten, wie man direkt am Beispiel der S_4 sehen kann: Der Zustand $|\phi_4, \phi_1, \phi_2, \phi_3\rangle$ ist äquivalent mit dem Zustand, besitzt aber die Signatur -1.
Überlegen Sie sich, wann die Parität trotzdem erhalten bleibt!