Aufgabe 7: Ideales Gas

(6 Punkte)

Gegeben sei die *thermische Ausdehnung* α mit

$$\alpha = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_P ,$$

sowie die *isotherme* bzw. *adiabatische Kompressibilität*, κ_T und κ_S, mit

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}\Big|_T \text{ und } \kappa_S = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}\Big|_S .$$

Zeigen Sie damit für die *spezifische Wärme bei konstantem Volumen* c_V bzw. für die *spezifische Wärme bei konstantem Druck* c_P die folgenden Beziehungen:

- $$c_V = \frac{TV\alpha^2\kappa_S}{(\kappa_T - \kappa_S)\,\kappa_T}$$
- $$c_P = \frac{TV\alpha^2}{\kappa_T - \kappa_S}$$

Hinweis:

1. Beginnen Sie mit dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik, $dQ = dU + pdV$ und betrachten Sie $U = U(T,V)$, d.h. T und V werden als unabhängig angenommen.
2. Da $S = S(T,V)$ ein exaktes Differential ist, gilt $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$.
3. Als Zwischenergebnis bekommen Sie (2 Punkte)
$$TdS = c_V dT + T\frac{\partial P}{\partial T}\Big|_V dV \tag{1}$$
und
$$TdS = c_P dT - T\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_P dP. \tag{2}$$
4. Betrachten Sie, ausgehend von Gl. (1) und (2), P und V als unabhängige Variablen und leiten Sie einen Ausdruck für die Differenz $c_P - c_V$ (1 Punkt) ab.
5. Betrachten Sie anschließend einen adiabatischen Prozess und leiten Sie aus Gl. (1) und (2) das Verhältnis $\frac{c_P}{c_V} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}$ her. Zeigen Sie hierfür explizit, dass
$$\frac{\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_P}{\frac{\partial P}{\partial T}\Big|_V} = \frac{\partial V}{\partial P}\Big|_T$$
gilt (2 Punkte).
6. Zeigen Sie nun die oben verlangten Beziehungen für c_V und c_P mit α, κ_T und κ_S (1 Punkt).

Aufgabe 8: Wärmeausgleich und Entropie

(2 Punkte)

Wir betrachten zwei Körper gleicher Art (gleicher Stoff und gleiches Volumen), welche allerdings zwei unterschiedliche Temperaturen T_1 und T_2 (mit $T_1 > T_2$) besitzen sollen. Werden diese in thermischen Kontakt gebracht (siehe Abbildung 1), fließt solange Wärmeenergie von Körper 1 nach Körper 2 bis sich die Temperaturen ausgeglichen haben. Berechnen Sie die Ausgleichstemperatur T_m und geben Sie die Gesamtänderung der Entropie ΔS an. Zeigen Sie, dass immer $\Delta S \geq 0$ gilt. Handelt es sich hierbei um einen reversiblen oder einen irreversiblen Vorgang (mit Begründung)?

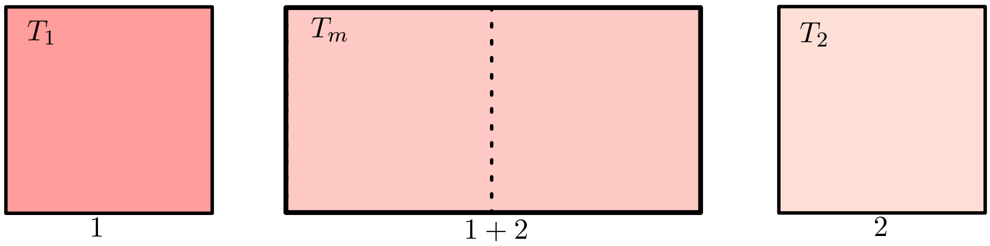

Abbildung 1: Temperaturausgleich $T_1, T_2 \longrightarrow T_m$ zwischen zwei gleichen Körpern durch Kontakt.

Hinweis: Es soll keine Wärmeenergie nach außen verloren gehen. Die Wärmemenge ist $Q = mcT$ mit Masse m, der spezifischen Wärme c und Temperatur T.