Aufgabe 11: Stationäre Verteilung im Gravitationsfeld

(3 Punkte)

Betrachten Sie ein ideales Gas bestehend aus Molekülen der Masse m in einem Gravitationsfeld $V(\mathbf{q})$.

1. Zeigen Sie, dass
$$f(\mathbf{q},\mathbf{p}) = c f_0(\mathbf{p}) e^{-\frac{V(\mathbf{q})}{k_B T}}$$
eine Lösung der Boltzmann-Gleichung ist, wobei $f_0(\mathbf{p})$ die Verteilungsfunktion im Gleichgewicht ohne Gravitationsfeld darstellt (für $f_0(\mathbf{p})$, siehe Gl. (1)). (1 Punkt)

2. Nun sei $V = V(z) = mgz$. Bestimmen Sie die Normierungskonstante c für eine gegebene Fläche A, d.h.
$$\int d\mathbf{q} = \int dxdydz = A \cdot \int_0^\infty dz.$$
(1 Punkt)

3. Nehmen Sie die Temperatur als höhenunabhängig an und leiten sie mit $V = V(z)$ eine barometrische Höhenformel ab. (1 Punkte)

Aufgabe 12: Geschwindigkeitsverteilung

(3 Punkte)

Betrachten Sie die in der Vorlesung vorgestellte Verteilungsfunktion eines idealen Gases,

$$f_0(\mathbf{p}) = n \left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2} e^{-\beta H(\mathbf{p})}, \tag{1}$$

mit $\beta = 1/k_B T$ und $H(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m$. Berechnen Sie hieraus die Verteilung des Betrags der Geschwindigkeit $v = |\mathbf{v}|$. (1 Punkt)
Geben Sie anschließend die wahrscheinlichste Geschwindigkeit als Funktion der Temperatur, d.h. $\hat{v} = \hat{v}(T)$ an. (1 Punkt)
Berechnen Sie nun die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ dieser Geschwindigkeitsverteilung und vergleichen Sie diesen Wert qualitativ sowohl mit $\hat{v}$ als auch mit $\tilde{v}$, welche sich aus dem direkten Vergleich der inneren Energie des idealen Gases und der kinetischen Energie $E_{\text{kin}} = E_{\text{kin}}(\tilde{v})$ ergibt. (1 Punkt)

Aufgabe 13: Entropie eines idealen Gases

(2 Punkte)

Die Entropie sei definiert als
$$S = -V k_B H$$
mit $f_0(\mathbf{p})$ aus Gl. (1) und
$$H = \int d\mathbf{p} f_0(\mathbf{p}) \ln f_0(\mathbf{p}).$$
Leiten Sie daraus den 2. Hauptsatz,
$$dS = \frac{dQ}{T},$$
ab. (2 Punkte)