Aufgabe 14: Ideales Gas im mikrokanonischen Ensemble

(12 Punkte)

Wir betrachten ein ideales Gas, d.h. N identische, isolierte Teilchen der Masse m in einem Volumen V, die nicht miteinander wechselwirken. Berechnen Sie damit die Entropie des Gases in Abhängigkeit der Energie E mit $E = p^2/(2m)$ als Energie eines freien Teilchens.

1. Zeigen Sie: Für große N gilt
$$\ln(N!) \approx N \ln(N) - N, \tag{1}$$
und das Volumen einer N-dimensionalen Kugel ($N \geq 2$) mit Radius r lautet
$$V_N(r) = \frac{\pi^{N/2}}{(N/2)!} r^N. \tag{2}$$
Hinweis: Benutzen Sie die Rekursionsformel $V_{N+1}(r) = \int_{-r}^{r} V_N\left(\sqrt{r^2 - z^2}\right) dz$ unter der Annahme, dass $V_N(r) = C_N r^N$. (Vergleich mit $N = 2$: $V_2(r) = \pi r^2 \Longrightarrow C_2 = \pi$). (2 Punkte)

2. Für die Entropie S gilt
$$S = k_B \ln \frac{\Gamma(E)}{N! h^{3N}}, \tag{3}$$
mit
$$\Gamma(E) = \int_{E \leq H(q,p) \leq \Delta E} d^{3N}q d^{3N}p. \tag{4}$$
Begründen Sie die Normierung $1/(N! h^{3N})$ (h: Planck' sches Wirkungsquantum) und erläutern Sie die Bedeutung von h^{3N}. (2 Punkte)

3. Berechnen Sie nun die Entropie aus (3). Als Zwischenergebnis (3 Punkte) bekommen Sie mit Gl. (2) und (4)
$$S = k_B \ln \left[\left(\frac{2\pi m E V^{2/3}}{h^2} \right)^{3N/2} \frac{1}{N!(3N/2)!} \left(\left[1 + \frac{\Delta E}{E} \right]^{3N/2} - 1 \right) \right]. \tag{5}$$
Rechnen Sie weiter unter Verwendung von Gl. (1) und unter der Annahme großer N. Sie erhalten schließlich mit
$$S(E, V, N) = k_B N \left[\frac{3}{2} \ln \left(\frac{4\pi m E V^{2/3}}{3 h^2 N^{5/3}} \right) + \frac{5}{2} \right], \tag{6}$$
die Entropie als Funktion von E, V und N. (3 Punkte)

4. Leiten Sie anschließend aus Gl. (6) mit Hilfe der Maxwell-Relationen sowohl einen Ausdruck für die innere Energie als auch die ideale Gasgleichung $pV = N k_B T$ ab. (2 Punkte)