Aufgabe 15: Kanonische Gesamtheit

(2 Punkte)

Betrachten Sie ein klassisches ideales Gas in einem homogenen Schwerefeld,

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + mgz_i \right) , \tag{1}$$

welches sich in einem unendlich hohen Zylinder befindet (siehe Abbildung 1).

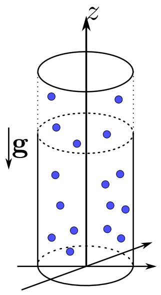

Abbildung 1: Unendlich hoher Zylinder in einem Schwerefeld **g** (zu Aufg. 15).

Das Schwerefeld sei, wie in Abbildung 1 gezeigt, entlang der Zylinderachse gegeben. Berechnen Sie nun mithilfe der kanonischen Gesamtheit:

1. die mittlere kinetische Energie eines Gasteilchens, (1 Punkt)
2. die mittlere potentielle Energie eines Gasteilchens. (1 Punkt)

Hinweis:

$$\int_0^\infty dx\; x^n e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2} \alpha^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2} \right)$$

mit

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\ ,\ \Gamma(1) = 1\ ,\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Aufgabe 16: Großkanonische Gesamtheit

(2 Punkte)

In einem Volumen V befindet sich ein ideales Gas mit gegebener Temperatur T, Teilchenzahl N und chemischen Potential μ. Zeigen Sie, dass das großkanonische Potential durch

$$Z_{\text{großkanonisch}} = \exp\left(\frac{V}{\lambda^3} e^{\beta\mu} \right) \tag{2}$$

gegeben ist, wobei $\lambda = h/\sqrt{\beta/(2\pi m)}$ die de Broglie Wellenlänge ist.

Aufgabe 17: Großkanonische Gesamtheit und Entropie

(4 Punkte)

Berechnen Sie die Entropie aus

$$S = -\frac{\partial \Omega}{\partial T}\bigg|_{V,\mu} \tag{3}$$

mithilfe von $\Omega = -k_B T \ln Z$ und $Z = Z_{\text{großkanonisch}}$ aus Gl. (2) und vergleichen Sie das Ergebnis mit Gl. (6) aus Aufgabe 14 (Blatt 6). (3 Punkte)
Hinweis:

1. Für das chemische Potential gilt:

$$\mu(V, T, < N >) = \frac{\ln\left(\frac{<N>\lambda^3}{V}\right)}{\beta}$$

2. Nutzen Sie geschickte Umformungen der folgenden Ableitungen (1 Punkt),

$$\frac{\partial \lambda}{\partial T} \text{ und } \frac{\partial z}{\partial T},$$

wobei $z = e^{\beta\mu}$ die sogenannte Fugazität darstellt.